

# Kapcsolat a DI és FI rendszerek között

Horváth Péter

2016. november 15.

## Tartalomjegyzék

<b>1. Mintavételezés</b>	<b>1</b>
1.1. Előzetes eredmény: a Poisson-féle összegzési formula . . . . .	1
1.2. A mintavett jel spektruma . . . . .	1
1.3. A DI jel spektruma . . . . .	2
<b>2. Jelrekonstrukció</b>	<b>3</b>
2.1. Visszaállítás ideális aluláteresztő szűrővel . . . . .	4
2.2. Visszaállítás nulladrendű tartóval . . . . .	4
<b>3. Folytonos idejű rendszerek diszkrét idejű megvalósítása („diszkrét szimuláció”)</b>	<b>7</b>
3.1. Az impulzusválasz szimulációja (impulzusválasz-invariancia) . . . . .	7
3.1.1. *Speciális eset: $H_c(s)$ valódi törtfüggvény . . . . .	8
3.1.2. *A szimulációs eljárás tulajdonságai . . . . .	9
3.1.3. 1. példa . . . . .	9
3.1.4. 2. példa . . . . .	9
3.2. Az átviteli függvény szimulációja . . . . .	10
3.2.1. A bilineáris transzformáció . . . . .	11
3.2.2. 1. példa . . . . .	12
3.2.3. 2. példa . . . . .	12

## 1. Mintavételezés

### 1.1. Előzetes eredmény: a Poisson-féle összegzési formula

Tekintsük az alábbi,  $T$ -periodikus Dirac-delta sorozatot:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

Mivel ez egy folytonos idejű periodikus jel, ezért Fourier-sorba fejthető  $\omega_0 = 2\pi/T$  alapkörfrekvenciával. A komplex folytonos idejű Fourier-sor együtthatói:

$$G_p^C = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} pt} dt = \frac{1}{T}, \quad -\infty < p < \infty.$$

A  $g(t)$  impulzussorozat ezek után felírható a Fourier-sorával:

$$g(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} G_p^C e^{j \frac{2\pi}{T} pt} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{j \frac{2\pi}{T} pt}.$$

Ebből

$$T \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{j 2\pi \frac{p}{T} t}.$$

Ezt az összefüggést nevezik Poisson-féle összegzési formulának is.

## 1.2. A mintavett jel spektruma

Mivel

$$u(t)\delta(t-t_0) = u(t_0)\delta(t-t_0),$$

ezért a folytonos időfüggvény  $T$  időközönkénti Dirac-deltával szorzása jó modellje a jel mintavételezésének. Képezzük az alábbi (fiktív) folytonos idejű jelet a mintavételezendő  $x_f(t)$  folytonos idejű jelből<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} x_*(t) &= T \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_f(t) \cdot \delta(t-kT), \\ x_*(t) &= x_f(t) \cdot T \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT), \end{aligned} \quad (1)$$

ahol a  $T$ -vel szorzás „csak” a jel dimenziójának a helyreállítását szolgálja: ezáltal  $x_f(t)$  és  $x_*(t)$  dimenziója megegyezik <sup>2</sup> (pl. feszültség).

Fourier-transzformáljuk (1)-et! A Fourier-transzformáció „kifordított” konvolúciós tétele alapján időfüggvények szorzatának spektrumát a spektrumok konvolúciójaként számíthatjuk ki:

$$X_*(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{x_f(t)\} * \mathcal{F}\left\{T \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\right\}$$

A Poisson-féle formula alapján

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{T \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\right\} &= \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi \frac{n}{T}t}\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta\left[j\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)\right], \end{aligned}$$

ahol az utóbbi lépés a Fourier-transzformáció modulációs tétele alapján lehetséges<sup>3</sup>.

Visszatérve a keresett spektrumra, konvolváljuk a spektrumokat az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} X_*(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X_f(j\omega) * 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left[j\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_f(j\nu) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left[j\left(\omega - \nu - n\frac{2\pi}{T}\right)\right] d\nu \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_f\left[j\left(\omega - \frac{2\pi}{T}n\right)\right] \end{aligned}$$

Összegezve,

$$X_*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_f\left[j\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_f[j(\omega - n\omega_s)].$$

ahol

$$\omega_s = 2\pi/T$$

a mintavételi körfrekvencia. Ebben a formában is látható a mintavételi tétel: ha  $x_f(t)$  sávkorlátozott úgy, hogy  $X_f(j\omega) \approx 0$  ha  $|\omega| > \omega_s/2$ , akkor a fenti szummában minden frekvencián csak „egy tag aktív”, a tükröképek egymásra lapolódása (jelátlapolódás, aliasing) elkerülhető.

<sup>1</sup>Egyes helyeken az  $x_*(t)$  jelet eltérően definiálhatják. Egyrészt szokás a  $x_*(t) = x_f(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$  alak (ez dimenzió

tekintetében nem egyezik az eredeti jellel), illetve (pl. Fodor: Jelek és rendszerek köyvbén  $x_*(t) = x_f(t) \cdot T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$ , ahol  $T_0$  nem egyenlő a mintavételi időközzel,  $T$ -vel.

<sup>2</sup>Tudjuk, hogy  $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\delta(t-t_0)dt = u(t_0)$ , ezért az integrálás „receptje” azt diktálja, hogy a jobb oldali feszültségdimenziót úgy kapjuk, hogy a bal oldalon feszültség\*a Dirac-delta dimenziója\*idő áll, a Dirac-delta tehát itt 1/idő dimenziójú.

<sup>3</sup>Érdemes megfigyelni, hogy ez is egy „önmagába transzformálódó” jel: Dirac-sorozat spektruma Dirac-sorozat.

### 1.3. A DI jel spektruma

Keressük az FI jelnek a mintavételi időpontokban értelmezett értékéből képzett DI sorozatot:

$$x[k] = x_f(k \cdot T)$$

A DI jel és az  $x_*(t)$  fiktív FI jel közötti összefüggés:

$$x_*(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - kT).$$

Keressünk kapcsolatot  $X_*(j\omega)$  és a DI jel

$$X(e^{j\vartheta}) \equiv \mathcal{F}\{x[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\vartheta k}$$

spektruma között! A két jel közötti összefüggés alapján

$$\begin{aligned} X_*(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt \\ &= T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt, \\ &= T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega kT} \end{aligned}$$

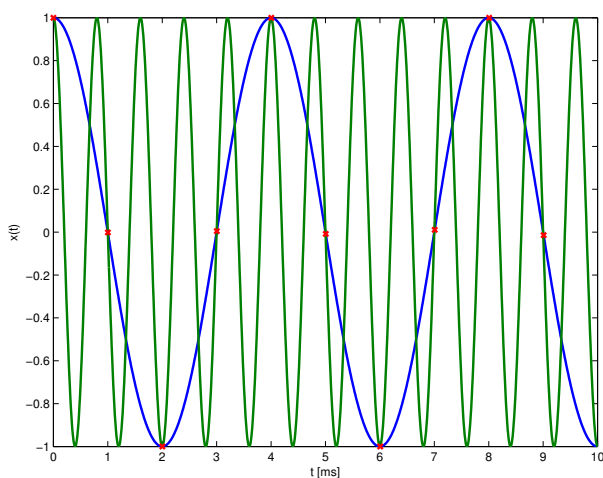
ahonnan összevetéssel

$$X(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{T} X_*(j\omega)|_{\vartheta=\omega T} = \frac{1}{T} X_*(j\omega)|_{\vartheta=2\pi\omega/\omega_s},$$

vagyis a fiktív  $x_*(t)$  spektruma és a DI jel spektruma (egy konstans szorzótényező erejéig) megegyezik,  $\omega = \vartheta/T$  helyettesítéssel a két spektrum „átjárható”.

Továbbá  $X_f(j\omega)$  és  $X_*(j\omega)$  közötti összefüggés alapján a mintavett DI jel és az FI jel spektruma közötti, már ismert összefüggést kapjuk:

$$X(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_f \left[ j \left( \frac{\vartheta}{T} - n \frac{2\pi}{T} \right) \right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_f \left[ j \left( \frac{\vartheta}{T} - n\omega_s \right) \right]. \quad (2)$$



1. ábra. 50 Hz-es és 250 Hz-es koszinusz mintavételezése 200 Hz mintavételi frekvenciával

## 2. Jelrekonstrukció

Célunk a folytonos idejű  $x_f(t)$  jel visszaállítása a  $T$  időközönként vett mintáiból, az  $x[k]$  DI jelből, illetve az ezzel lényegében ekvivalens  $x_*(t)$  jelből.

A feladat általánosan megoldható a  $h_r(t)$  rekonstrukciós függvény (szűrő) segítségével, ha az  $\hat{x}_f(t)$  rekonstruált FI jelet az alábbi formában kívánjuk előállítani:

$$\hat{x}_f(t) = \frac{1}{T} x_*(t) * h_r(t),$$

vagyis a rekonstrukció során az  $x_*(t)$  súlyozott Dirac-delta-sorozattal gerjesztünk egy  $h_r(t)$  impulzusválaszú FI rendszert (szűrőt). Behelyettesítve  $x_*(t)$  definícióját,

$$\hat{x}_f(t) = \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_f(t) \cdot \delta(t - kT) \right] * h_r(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_f(\tau) \cdot \delta(\tau - kT) h_r(t - \tau) d\tau,$$

majd a szummázást az integrálással felcserélve

$$\hat{x}_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_f(\tau) \cdot \delta(\tau - kT) h_r(t - \tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_f(kT) h_r(t - kT),$$

vagyis

$$\boxed{\hat{x}_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_r(t - kT).} \quad (3)$$

A spektrumokra áttérve

$$\begin{aligned} \hat{X}_f(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] H_r(j\omega) e^{-j\omega kT} \\ &= H_r(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega kT} \\ &= \frac{1}{T} \cdot H_r(j\omega) \cdot X_*(j\omega). \end{aligned} \quad (4)$$

### 2.1. Visszaállítás ideális aluláteresztő szűrővel

A rekonstrukció elvileg lehetséges, ha egyrészt az  $x_*(t)$  jel jelátlapolódástól mentes (kielégítettük a mintavételi tételt), másrészt  $G_r(j\omega)$  egy ideális aluláteresztő<sup>4</sup>,

$$H_r(j\omega) = H_{id}(j\omega) = T[\varepsilon(\omega + \omega_s/2) - \varepsilon(\omega - \omega_s/2)] = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| \geq \omega_s/2 \end{cases}$$

Az ennek megfelelő impulzusválaszt korábban megismertük:

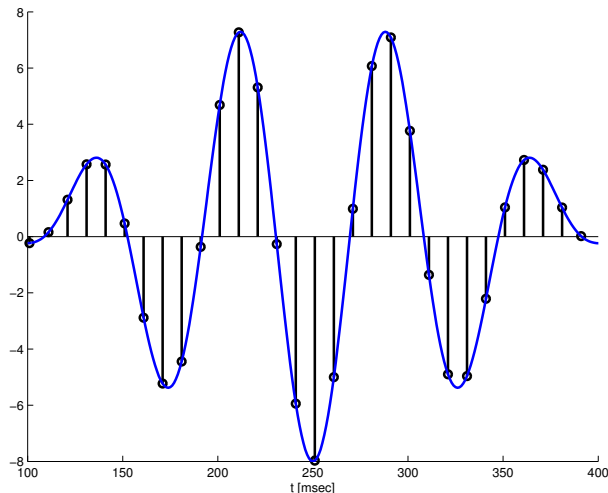
$$\begin{aligned} h_{id}(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H_{id}(j\omega)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} T e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \left[ \frac{e^{j\omega t}}{jt} \right]_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \\ &= \frac{T}{2\pi jt} (e^{j\frac{\pi}{T}t} - e^{-j\frac{\pi}{T}t}) \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{T}t}{\frac{\pi}{T}t} \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Egy fix késleltetést még megengedhetnénk.

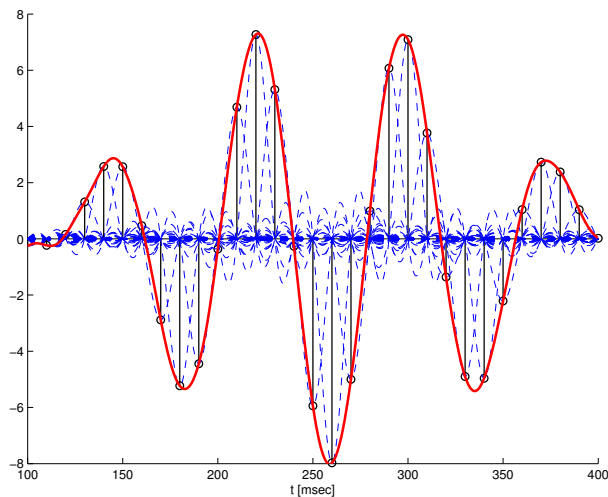
Ezt (3) rekonstrukciós formulába helyettesítve a visszaállított jel

$$\hat{x}_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - kT)}{\frac{\pi}{T}(t - kT)}. \quad (5)$$

Az ideális aluláteresztő tehát tökéletesen visszaállítja a folytonos idejű jelet a mintavételi időpontokban, és – ha a jelátlapolódás elhanyagolható – a mintavételi időpontok között „interpolálja” a rekonstruált jelet úgy, hogy az egybeesik az eredeti folytonos idejű jellel.



2. ábra. 1. példa: Az eredeti FI jel és mintái

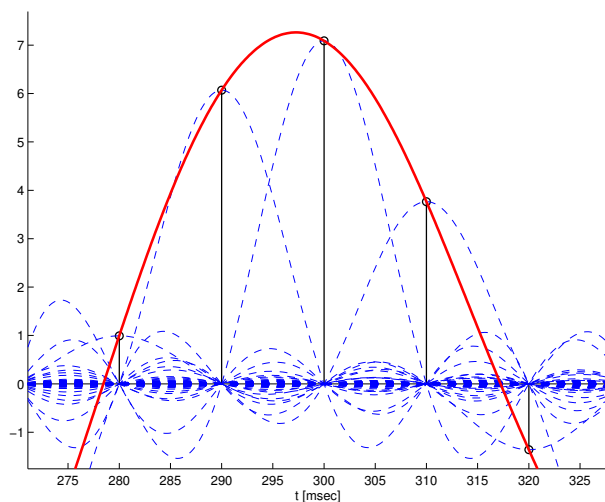


3. ábra. 1. példa: A visszaállított FI jel és a  $\frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - kT)}{\frac{\pi}{T}(t - kT)}$  tagok külön megjelenítve

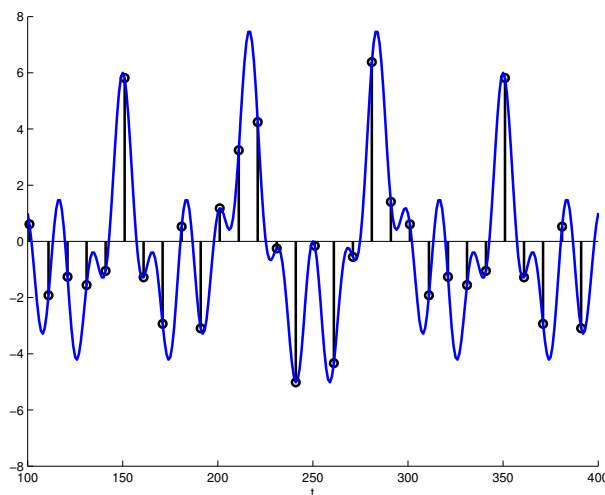
Az ideális aluláteresztő nem realizálható, hiszen egyrészt végtelenül meredek levágás jellemzi a frekvenciatartományban, másrészt végtelen sok  $x[k]$  érték ismerete és felhasználása szükséges (köztük jövőbeliek is, hiszen a rendszer nem kauzális).

## 2.2. Visszaállítás nulladrendű tartóval

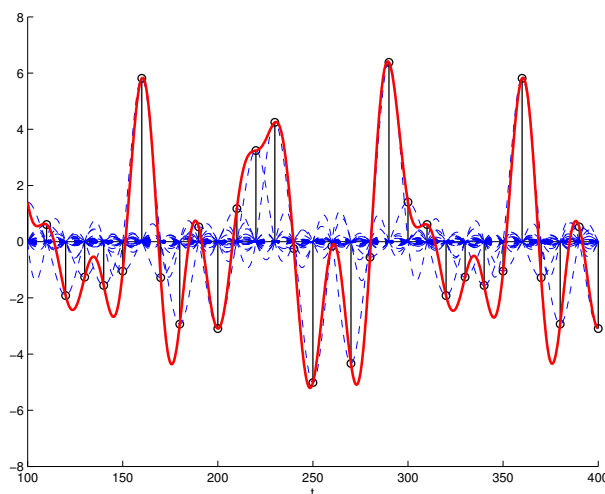
Egy, a gyakorlatban kivitelezhető rekonstrukciós szűrő a nulladrendű tartó (Zero Order Hold, ZOH), ami azt feltételezi, hogy a mintákat időben olyan sűrűn vettük, hogy köztük a jel értéke alig változik. Ezért nem követünk el nagy hibát, ha a rekonstrukció során a mintavételi időpontok közti pontos interpoláció helyett két mintavételi időpont között az utolsó minta értékét „tartjuk”. Ez formálisan azt jelenti,



4. ábra. 1. példa: A visszaállított FI jel (a jel részlete kinagyítva)

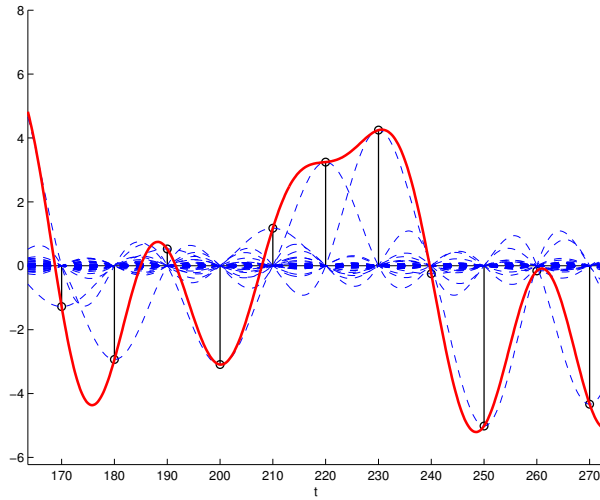


5. ábra. 2. példa: Az eredeti FI jel és mintái, a mintavételi tételt megsértve



6. ábra. 2. példa: A sikertelenül visszaállított FI jel és a  $\frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-kT)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}$  tagok külön megjelenítve

hogyan a (3) rekonstrukciós formulában az interpoláló függvény egy  $T$  hosszúságú ablakfüggvény. Ezen



7. ábra. 2. példa: A sikertelenül visszaállított FI jel (a jel részlete kinagyítva)

ablakfüggvény eltolt és súlyozott értékei alakítják ki közelítőleg a rekonstruálandó jelet.

$$h_{ZOH}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Az ennek megfelelő  $H_{ZOH}(j\omega)$  átviteli karakterisztika az elemi jelek Fourier-transzformáltja kapcsán megismert<sup>5</sup>

$$H_{ZOH}(j\omega) = T \cdot \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \cdot e^{-j\omega T/2}.$$

Ez a rekonstrukciós szűrő  $\omega = 0$ -ban kielégíti a (4)-ből adódó kritériumot ( $H_{ZOH}(j0) = T$ ), azonban nagyobb frekvenciákon amplitúdótorzítást okoz, továbbá, mivel az átviteli karakterisztika nem sávkorlátozott  $\omega_s/2$ -re, a visszaállítás során az első Nyquist-zónán kívüli frekvenciaösszetevők is megjelennek a visszaállított jelben, ami általában nem kívánatos.

<sup>5</sup>v.ö.  $T$  hosszúságú négyzetimpulzus  $T/2$ -vel eltolva.

### 3. Folytonos idejű rendszerek diszkrét idejű megvalósítása („diszkrét szimuláció”)

Ebben a fejezetben olyan módszereket ismerünk meg, amelyek lehetővé teszik folytonos idejű rendszerek közelítő megvalósítását diszkrét idejű rendszerek segítségével.

Speciálisan gyakran előforduló feladat „nevezetes” folytonos idejű szűrők (pl. a Butterworth-szűrő) tervezési receptje alapján diszkrét idejű szűrők tervezése.

Célunk, hogy a „szimuláló” DI rendszer válasza azonos gerjesztésre minél inkább megközelítse a szimulált FI rendszer válaszát: ha a gerjesztés

$$u_D[k] = u_C(kT_d + 0),$$

akkor

$$y_D[k] \approx y_C(kT + 0)$$

legyen. Itt  $T_d$  a DI rendszer tervezési mintavételi ideje. Egyúttal szeretnénk, hogy a DI szimulátor megőrizze az FI rendszer G-V stabilis és kauzális tulajdonságait.

#### 3.1. Az impulzusválasz szimulációja (impulzusválasz-invariancia)

Szorítkozzunk olyan folytonos idejű rendszerekre, amelyeknek az impulzusválasza *nem tartalmaz* Dirac-összetevőt! A szimulálandó folytonos idejű rendszer impulzusválaszának alakja legyen tehát

$$h_C(t) = \varepsilon(t)f(t)$$

alakban adott, ahol  $f(t)$  egy folytonos függvény.<sup>6</sup>

Az FI rendszer  $u_C(t)$  gerjesztére adott válaszát a  $h_C(t)$  impulzusválasszal konvolválva számíthatjuk. Ha a gerjesztés belépő, a rendszer pedig kauzális, akkor

$$y_C(t) = \int_0^t h_C(\tau)u_C(t-\tau)d\tau, \quad t \geq 0$$

Ennek a  $kT_d$  ipőpillanatban felvett értéke

$$y_C(kT_d) = \int_0^{kT_d} h_C(\tau)u_C(kT_d - \tau)d\tau, \quad k = 0, 1, \dots$$

Bontsuk ezt az integrált  $T_d$  hosszúságú intervallumokra!

$$y_C(kT_d) = \sum_{i=1}^k \int_{(i-1)T_d}^{iT_d} h_C(\tau)u_C(kT_d - \tau)d\tau, \quad k = 0, 1, \dots$$

Ha  $T_d$ -t elegendően kicsire választhatjuk, akkor a  $T_d$  hosszúságú intervallumokon előírt integrálokat közelíthetjük az „alsó” téglalap területével:

$$y_C(kT_d) \approx \sum_{i=1}^k T_d h_C((i-1)T_d)u_C(kT_d - (i-1)T_d) = \sum_{i=0}^{k-1} T_d h_C(iT_d)u_C((k-i)T_d), \quad k = 0, 1, \dots$$

Vessük ezt össze a szimuláló DI rendszer válaszána formulájával!

$$y_D[k] = \sum_{i=0}^k h_D[i]u_D[k-i]$$

Az összevetésből kiolvasható, hogy a szimuláló rendszer impulzusválaszát a FI rendszer impulzusválaszána  $T_d$  időközönkénti mintavételezésével állíthatjuk elő:

$$\boxed{h_{D1}[k] = T_d \varepsilon[k] f(kT_d)} \quad (6)$$

<sup>6</sup> A  $c$  index a folytonos időre [continuous] utal.

Összefoglalva, a módszer lényege, hogy a szimulálandó folytonos idejű rendszer  $H(s)$  átviteli függvényéből  $H(s) \rightarrow h_C(t) \rightarrow h_{D1}[k] \rightarrow H_{D1}(z)$  „útvonalon”, az impulzusválasz alakjának megőrzése kritérium alapján jutunk a szimuláló DI rendszer átviteli függvényéhez. A kapott  $H_{D1}(z)$  átviteli függvényt a korábban megismert módszerek (pl. kanonikus realizációk) révén megvalósíthatjuk.

A módszert a Matlab/Octave *impinvar* függvénye valósítja meg.

### 3.1.1. \*Speciális eset: $H_C(s)$ valódi törtfüggvény

Azért, hogy megvizsgálhassuk az impulzusválasz szimulációjával kapott DI rendszer viselkedését, vizsgáljunk meg egy speciális (de a gyakorlatban nagyon fontos) esetet. Tegyük fel, hogy a szimulálandó FI rendszer átviteli függvénye valódi törtfüggvény (a nevező fokszáma szigorúan magasabb a számláló fokszámánál, vagyis az impulzusválasz biztosan nem tartalmaz Dirac-összetevőt), és az  $n$  darab pólus mindegyike egyszeres.

Ekkor a FI rendszer átviteli függvényének részlettörtekre bontott alakja

$$H_C(s) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{s - p_i},$$

az impulzusválasz pedig

$$h_C(t) = \varepsilon(t) \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}$$

alakú.

Ennek  $T_d$  időközzel vett mintái adják a szimuláló DI rendszer impulzusválaszát:

$$h_{D1}[k] = T_d \varepsilon[k] h_C(kT_d) = \varepsilon[k] \sum_{i=1}^n T_d C_i e^{p_i k T_d} = \varepsilon[k] T_d \sum_{i=1}^n C_i (e^{p_i T_d})^k,$$

az ennek megfelelő átviteli függvény pedig ennek z-transzformáltja,

$$H_{D1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{D1}[k] z^{-k} = T_d \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n C_i (e^{p_i T_d} z^{-1})^k = T_d \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} C_i (e^{p_i T_d} z^{-1})^k$$

A végtelen összegzést elvégezve<sup>7</sup> (ami  $|e^{p_i T_d} z^{-1}| < 1$  esetben tehető meg) az alábbi átviteli függvény adódik a diszkrét szimulátorra:

$$H_{D1}(z) = T_d \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{1 - e^{p_i T_d} z^{-1}} = T_d \sum_{i=1}^n \frac{C_i z}{z - e^{p_i T_d}} \quad (7)$$

Ez az összefüggés megadja a folytonos idejű rendszer pólusainak és a felhasználni kívánt mintavételi időnek az ismeretében a szimuláló DI rendszer pólusait.

Jól látható, hogy az impulzusválasz szimulátorának *pólusai* közvetlenül megkaphatók a szimulálandó FI rendszer pólusaiból

$$q_i = e^{p_i T_d}$$

helyettesítéssel, vagyis az impulzusválasz szimulátora egy

$$z = e^{s T_d} \quad (8)$$

leképezést valósít meg az  $s$  és a  $z$  tartománybeli pólusok között. Ha az FI rendszer GV-stabil, minden  $p_i$  a bal félsíkba esik, akkor minden  $q_i$  az egységkör belsejébe esik, vagyis a módszer biztosan megőrzi a stabilitási tulajdonságot. Az átviteli függvények zérusai között bonyolultabb, itt nem részletezendő összefüggés van.

---

<sup>7</sup>  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

### 3.1.2. \*A szimulációs eljárás tulajdonságai

Figyelembe véve, hogy a komplex frekvenciatartománybeli változókat formálisan  $s = \sigma + j\omega$  ill.  $z = re^{j\vartheta}$  alakban írtuk, a (8) leképezés következménye

$$r = e^{\sigma T_d}$$

$$\vartheta = \omega T_d.$$

Ebből látható, hogy a transzformáció kielégíti azt a követelményt, hogy  $s$ -ben a bal félsík az egységkör belsejébe képeződjön le (ha  $\sigma < 0$ , akkor  $0 < r < 1$ , és ha  $\sigma > 0$ , akkor  $r > 1$ ). Ha  $\sigma = 0$ , akkor  $r = 1$ , vagyis a  $j\omega$  képzetes tengely az egységkörösre képeződik le. A probléma azonban az, hogy ez a leképezés nem egy-egyértelmű. Az  $s$  sík  $2\pi/T_d$  magasságú „csíkjai” képeződnek le az egységkör belsejébe, és ezek a csíkok egymásra lapolódnak. Ugyanis

$$z = e^{\sigma T_d} e^{j(\omega + p \frac{2\pi}{T_d}) T_d} = e^{\sigma T_d} e^{j\omega T_d}, \quad p = \pm 1, \pm 3, \dots$$

Ez azt jelenti, hogy a mintavételezéshez kapcsolódó jelátlapolódáshoz hasonló jelenség lép fel, és a mintavételezésnél megismert (2) összefüggés szerint a szimuláló DI rendszer, valamint a szimulálandó FI rendszer átviteli karakterisztikája közötti összefüggés

$$H_{D1}(e^{j\vartheta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_C \left( j \frac{\vartheta}{T_d} - j \frac{2\pi}{T_d} n \right).$$

Ugyanazt a jelátlapolódást tapasztaljuk, amit a mintavételezéssel kapcsolatban láttunk, de itt nem spektrumok, hanem az átviteli karakterisztika  $n \cdot 2\pi$ -vel eltolódott replikái lapolódnak át, ha a szimulálandó rendszer átviteli karakterisztikájára nem teljesül a választott  $T_d$  mellett a mintavételi tétel (az nem sávkorlátozott  $\pi/T_d$  sávkorláttal). Természetesen  $T_d$  csökkentésével a „csíkok” szélessége nő, az átlapolódás okozta hiba mértéke csökken.

A módszer felüláteresztő jellegű rendszerek/szűrők transzformálására nyilvánvalóan alkalmatlan, hiszen az ilyen rendszerek átviteli karakterisztikája nem sávkorlátozott.

### 3.1.3. 1. példa

Keressünk DI realizációt a folytonos idejű integrátorhoz. Az integrátor gerjesztés-válasz kapcsolata:

$$y_C(t) = \int_{-\infty}^t u_C(\tau) d\tau,$$

impulzusválasza (ha  $u_C(t) = \delta(t)$ , akkor  $y_C(t) = \varepsilon(t)$ )

$$h_C(t) = \varepsilon(t),$$

átviteli függvénye

$$H_C(s) = \frac{1}{s}.$$

A DI szimulátor impulzusválasza

$$h_{D1}[k] = T_d \varepsilon[k],$$

átviteli függvénye pedig

$$H_{D1}(z) = T_d \frac{z}{z-1}$$

### 3.1.4. 2. példa

Legyen a realizálandó FI átviteli függvény

$$H_C(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}.$$

Az ehhez tartozó impulzusválasz

$$h_C(t) = \varepsilon(t) \alpha e^{-\alpha t}.$$

1. megoldás: a (6)-be helyettesítve

$$h_{D1}[k] = \varepsilon[k]\alpha T_d e^{-\alpha k T_d} = \varepsilon[k]\alpha T_d (e^{-\alpha T_d})^k$$

2. megoldás: A DI szimulátor átviteli függvénye (7)-be  $n = 1$ ,  $C_1 = \alpha$ ,  $p_1 = -\alpha$  értékeket helyettesítve

$$H_{D1}(z) = \frac{T_d \alpha z}{z - e^{-\alpha T_d}},$$

amit inverz  $z$ -transzformálva valóban

$$h_{D1}[k] = \varepsilon[k]\alpha T_d (e^{-\alpha T_d})^k$$

adódik, amint azt  $h_C(t)$  direkt mintavételezéséből is megkaptuk.

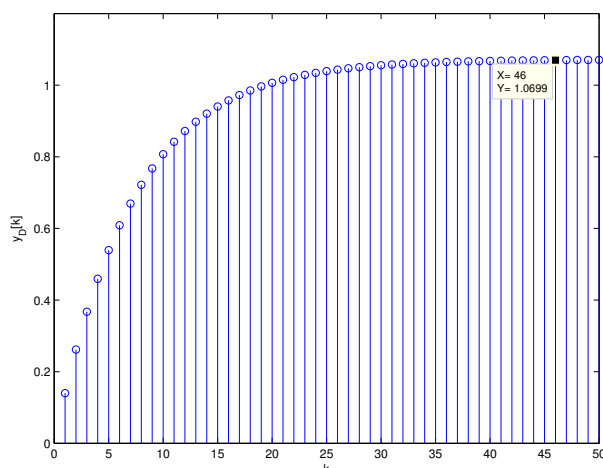
Ha most a módszer hátrányait illusztrálandó a FI és a DI rendszer ugrásválaszát hasonlítjuk össze, akkor az FI rendszer ugrásválaszának végértéke a végérték-tétel alapján

$$g_C(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} H_C(s) = 1,$$

míg a diszkrét idejű szimuláló rendszer ugrásválaszának végértéke<sup>8</sup>

$$g_{D1}[+\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{z}{z - 1} H_{D1}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T_d \alpha z^2}{z - e^{-\alpha T_d}} = \frac{T_d \alpha}{1 - e^{-\alpha T_d}} > 1,$$

és az eltérés<sup>9</sup> annál kisebb, minél kisebb  $T_d$ .



8. ábra. A szimuláló rendszer ugrásválasza  $\alpha = 0,7$ ,  $T_d = 0,2$  értékekre. A végérték nagyobb, mint a FI rendszer esetében

### 3.2. Az átviteli függvény szimulációja

Az impulzusválasz szimulációja során megismert problémákat kiköszöbölhetjük, ha egy olyan leképezést találunk  $s$  és  $z$  között, ami

- A képzetes tengelyt az egységkörre képezi le.
- A bal félsíkot az egységkör belsejébe képezi le, hogy a G-V stabilitási tulajdonságot megőrizze, de az  $s$  és a  $z$  értékek között *egy-egyértelmű* leképezést biztosítson a jelátlapolódási problémák elkerülésére, és
- az  $s$ -beli racionális törtfüggvényeket  $z$ -ben is racionális törtfüggvényekre képezze le.

Ez utóbbi követelmény azért fontos, mert csak racionális törtfüggvény alakú DI átviteli függvényeket tudunk realizálni a megismert jelfolyamhálózatokkal (pl. valamelyik kanonikus alak felhasználásával).

<sup>8</sup>Vagy, ami ezzel ekvivalens, a rendszer erősítése a nulla körfrekvencián.

<sup>9</sup>Nem mindegy, hogy a 100 emeletes házba tervezett DI liftvezérlőnk megpróbálja-e aszimptotikusan a 107. emeletre juttatni a liftet?

### 3.2.1. A bilineáris transzformáció

Ilyen transzformáció a korábban (a DI aszimptotikus stabilitással kapcsolatban) már említett *bilineáris* transzformáció, amit a

$$s = \frac{p}{T_d} \frac{z-1}{z+1}$$

illetve a

$$z = \frac{1 + sT_d/p}{1 - sT_d/p}$$

leképezési szabály ír le. A  $p$  paramétert a  $0 < p \leq 2$  intervallumban választjuk meg.

Az átviteli függvény szimulációja a bilineáris transzformációval:

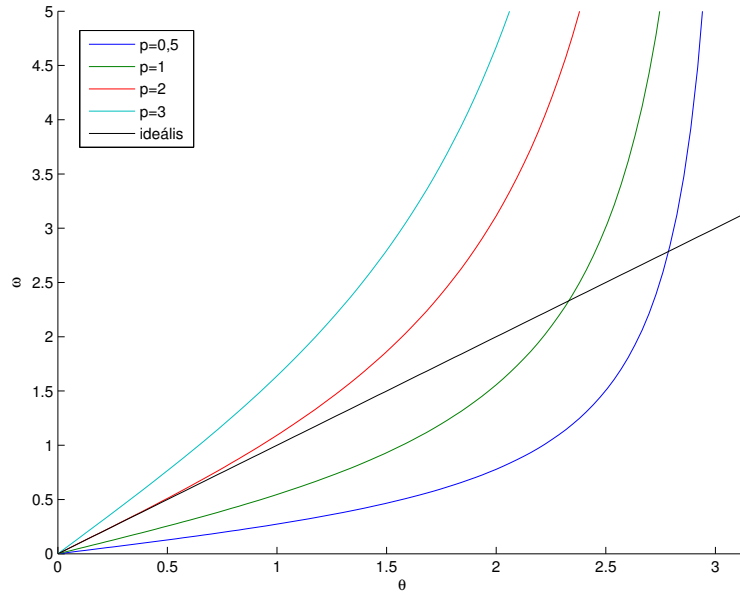
$$H_{D2}(z) = H_c(s) \Big|_{s=f(z)=\frac{p}{T_d} \frac{z-1}{z+1}}$$

Itt  $T_d$ -nek (az impulzusválasz szimulációjával ellentétben) nincs szemléletes jelentése.

Az  $s = j\omega$ ,  $z = e^{j\vartheta}$  megfeleltetéssel ugyanis

$$\begin{aligned} j\omega &= \frac{p}{T_d} \frac{e^{j\vartheta} - 1}{e^{j\vartheta} + 1} \\ &= \frac{p}{T_d} \frac{e^{j\vartheta/2} (e^{j\vartheta/2} - e^{-j\vartheta/2})}{e^{j\vartheta/2} (e^{j\vartheta/2} + e^{-j\vartheta/2})} \\ &= \frac{p}{T_d} j \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \end{aligned}$$

így a frekvenciaváltozók közötti kapcsolat<sup>10</sup>



9. ábra. A  $\vartheta$  és az  $\omega$  frekvenciaváltozók kapcsolata  $p$  különböző értékei mellett

$$\omega = \frac{p}{T_d} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \leftrightarrow \vartheta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega T_d}{p}$$

Ebből látható, hogy rendre  $\omega = 0$ -nak  $\vartheta = 0$ ,  $\omega \rightarrow \infty$ -nek  $\vartheta \rightarrow \pi$  és  $\omega \rightarrow -\infty$ -nek  $\vartheta \rightarrow -\pi$  felel meg. Az  $s$  sík origója a  $z = 1$  pontra, a pozitív  $j\omega$  tengely a felső fél-egységkörre, a negatív  $j\omega$  tengely az alsó fél-egységkörre képeződik le.

A  $p = 2$  választással kis frekvenciákon az ideális  $\omega = \vartheta/T_d$  kapcsolat is kiadódik. A  $p > 2$  választásnak nincs értelme, mivel az semmilyen frekvencián nem ad jó eredményt. A  $p$  értéke az adott feladatban megválasztható úgy, hogy a  $\theta$  és az  $\omega$  közötti összefüggés egy kívánt  $\omega_0$  frekvencia környezetében megközelítse az ideális  $\omega = \theta/T_d$  összefüggést.

<sup>10</sup>A kapcsolat erősen nemlineáris, de a legtöbb feladatnál (pl. szűrők szimulációja) az amplitúdókarakterisztika előírása intervallumonként konstans, ahol a nemlineáris összefüggés nem jelent különösebb problémát.

### 3.2.2. 1. példa

A FI integrátor DI szimulátora a bilineáris transzformációval

$$H_{D2}(z) = \frac{1}{s} \Big|_{\frac{p}{T_d} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{T_d}{p} \frac{z+1}{z-1},$$

a hozzá tartozó impulzusválasz pedig

$$h_{D2}[k] = \frac{2T}{p} \left\{ \frac{1}{2} \delta[k] + \varepsilon[k-1] \right\},$$

ami  $p = 2$  választással

$$h_{D2}[k] = T \left\{ \frac{1}{2} \delta[k] + \varepsilon[k-1] \right\},$$

vagyis ugyanazt kapjuk, mint az impulzusválasz szimulátorával, kivéve  $k = 0$ -ban, ahol megjelenik egy  $1/2$ -es érték. Az FI rendszer impulzusválasza  $t = 0$ -ban  $0$ -ról  $1$ -re ugrik, a bilineáris transzformációval (és a  $p = 2$ , kis frekvenciákon „jó”) választással nyert rendszer impulzusválasza a számtani közepet adja.

### 3.2.3. 2. példa

Legyen a realizálandó FI átviteli függvény ismét

$$H_c(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}.$$

A bilineáris transzformációval adódó DI rendszer átviteli függvénye

$$\begin{aligned} H_{D2}(z) &= \frac{\alpha}{\frac{2}{T_d} \frac{z-1}{z+1} + \alpha} \\ &= \frac{\alpha T_d z + \alpha T_d}{(\alpha T_d + 2)z + \alpha T_d - 2} \end{aligned}$$