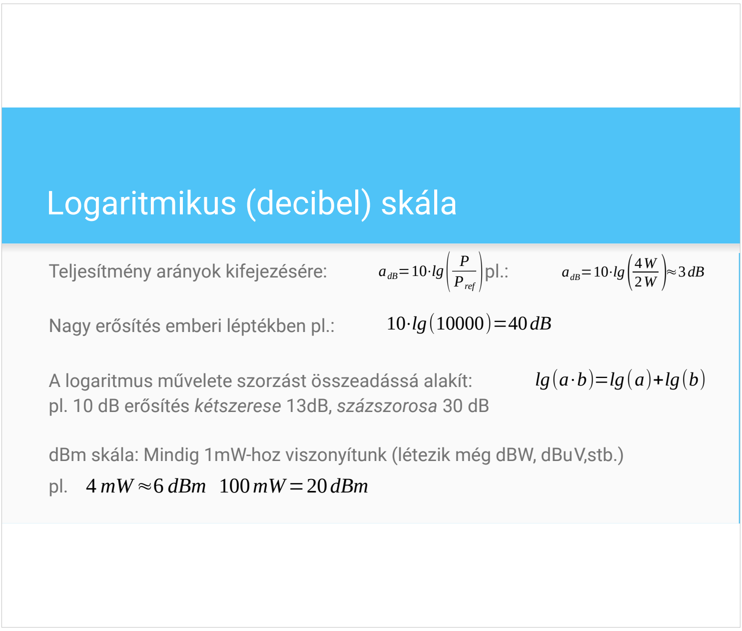
Matematikai alapok és modulációk

HA5KFU
rádióamatőr klub

Előadó: Balázs László
laszlourasag@gmail.com

Tematika

- Matek
    - dB skála
    - Komplex számok
    - Fazorok
    - Fourier-transzformáció
- Modulációk
    - Modulációs tétel
    - CW
    - Fónia: AM, FM
    - Digitális: FSK, PSK, QAM
    - Analóg képátvitel: SSTV
    - IQ (de)moduláció



A logaritmikus skáláknál a logaritmus azon tulajdonságát használjuk ki, amivel egy szorzatot összeadássá tud alakítani. Így nagy számok (pl. erősítés vagy szakaszcsillapítás) emberibb léptékben tárgyalhatóak.
(Richter-skála – földrengésekre – is logaritmikus)

A decibel skálán mindig valamilyen teljesítményarányt jelenítünk meg, (pl. a teljesítmény az adóantennánál a vevőantennához képest, megadja nekünk a szakaszcsillapítást).

Van amikor a viszonyításunk egy fix érték, pl. a dBm (decibel milliwatt) skálán mindig 1 mW a referenciaérték.

Komplex számok

$$\mathbb{C} = \{a + bj | a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$j = 0 + 1 \cdot j = \sqrt{-1}$$

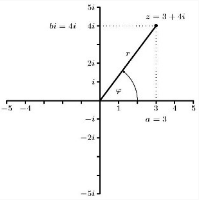
Ez igaz, de közelítsük meg más irányból!

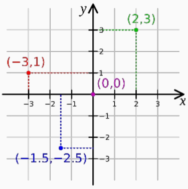
Középiskolában talán elhangozhatott a másodfokú egyenlet tárgyalásakor, hogy a komplex számokat azért vezették be, hogy meg lehessen oldani akkor is az egyenletet, ha a diszkrimináns negatív.

Ebben ugyan van igazság, a mérnöki gyakorlatban viszont ebből kifolyólag vannak más előnyös tulajdonságai is, amik nem köthetők ilyen közvetlenül a másodfokú egyenletekhez.

Im-Re sík <-> x-y sík

$3+4j$





$2x+3y$

Ortogonális bázisvektorok: $(1;j)$ $(x;y)$

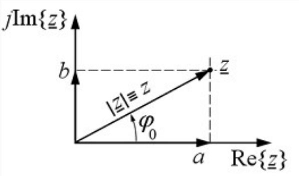
A komplex számok kiterjesztik az eddig ismert számegyenesünket egy számsíkká, ahol a vízszintes tengelyen a már eddig is ismert valós számok találhatók, a függőleges tengely mentén pedig a képzetes számok. Így a sík minden pontja egy komplex szám, mely áll valamekkora valós és valamekkora képzetes részből.

Ez teljesen olyan, mint egy „közönséges” derékszögű koordináta rendszer, csak itt most az **x** és **y** tengelyek helyett valós (**Re**) és képzetes (**Im**) tengelyeket használunk.

<u>Megjegyzés:</u> Az, hogy a bázisvektorok ortogonálisak, azt jelenti, hogy az egyikkel nem lehet kifejezni a másikat, vagyis az egyik nem tartalmazza a másikat, vagyis teljesen függetlenek. Ez a megállapítás a későbbiekben fontos lesz!

Euler-formula

$$\underline{z} = a + jb = \boxed{z\cdot(\cos(\varphi_0) + j\sin(\varphi_0)) = z\cdot e^{j\varphi_0}}$$



Descartes Polár

$$|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi_0 = atan\,2(b, a) \approx \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

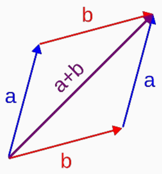
A komplex számok ábrázolására két módszer van: descartes vagy polár koordináták.

Előbbi már ismert, hiszen itt csak azt mondjuk meg, hogy egy adott pontba való eljutáshoz mennyit kell vízszintesen, illetve függőlegesen haladnunk.
Polár koordináták esetében azt adjuk meg, hogy mennyit és milyen szögben (a vízszintes tengelyhez képest) kell előre haladnunk, hogy egy adott pontba eljussunk.

Belátható, hogy mindkét módszerrel el lehet jutni a számsík bármelyik pontjába, és minden pontjába csak egyféleképpen, így a két leírás egyértelműen egymásba alakítható. Ennek az átalakításnak a mikéntjét az Euler-formula írja le.

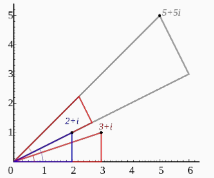
Műveletek komplex számokkal

Összeadás



$$(a_1 + ja_2) + (b_1 + jb_2) = (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2)$$

Szorzás



$$Ae^{j\alpha} \cdot Be^{j\beta} = ABe^{j(\alpha+\beta)}$$

A koordináta rendszer analógia alapján adódik, hogy a komplex számokat vektorokként kezeljük, és így is kell rajtuk műveleteket végezni.

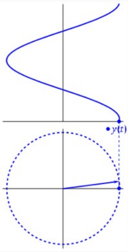
A két leírási alak (descatres és polár) azért jó, mert előbbiben az összeadást, utóbbiban a szorzást könnyebb elvégezni. Így általában az elvégzendő műveletnek megfelelően alakítjuk a komplex értékeket egyik vagy másik alakjukra.

Komplex forgóvektor

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

$$Im\{e^{j\omega t}\} = \sin(\omega t)$$

$$Re\{e^{j\omega t}\} = \cos(\omega t)$$



Az Euler-formulából más hasznos dolog is kiszedhető. Ha a polár alakban felírt vektorunk szögét növelni kezdjük (pl. valamilyen időfüggő taggal), akkor az a vektor forgómozgást fog végezni az origó körül.

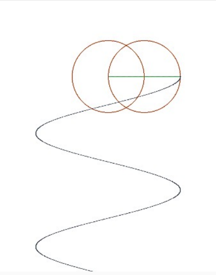
Az Euler-formula alapján belátható, hogy ilyenkor a vektor valós tengelyre vett vetülete egy koszinusz függvény szerint változik (a dián kékkel jelölve), a képzetes tengelyre vett vetülete pedig szinusz függvény szerint.

Megjegyzés: A szinusz és koszinusz függvény a két tengelyre képződik le, melyekről azt mondtuk, hogy ortogonálisak, vagyis egymástól függetlenek (lásd: 5. dia). Ez alapján arra következtethetünk, hogy a szinusz és koszinusz függvények is valamilyen módon függetlenek egymástól, vagyis az egyik nem tartalmazza a másikat. Emlékezzünk erre!

Komplex forgóvektor - visszafelé

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$



Az euler-formula átrendezésével a koszinusz és szinusz függvényeket is felírhatjuk a komplex forgóvektorokból.
Ezzel a módszerrel néha könnyebb számolni (pl. sok trig azonosság sokkal könnyebben levezethető, mint háromszögekkel), de más előnyei is vannak.
Látható,hogy mind a szinusz, mind a koszinuszban pozitív és negatív forgóvektorokat találunk, amelyek pontosan ugyan akkorák, csak ellentétes irányban forognak, „egymás tükörképei”.

Fazorok (komplex csúcsérték)

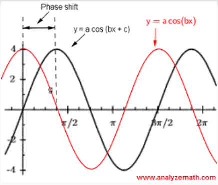
$$u(t)=U\cdot\cos(\omega t+\varphi)\Leftrightarrow\overline{U}=U\cdot e^{j\varphi}$$

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)\Leftrightarrow\overline{U}=\overline{U}_1+\overline{U}_2$$

$$x(t)=K\cdot u(t)\Leftrightarrow\overline{X}=K\cdot\overline{U}$$

$$y(t)=u'(t)\Leftrightarrow\overline{Y}=j\omega\overline{U}$$

Csak szinuszos jeleknél!



$$a\cos(bx)\Leftrightarrow a\,e^{j0}=a$$

$$a\cos(bx+c)\Leftrightarrow a\,e^{jc}$$

Az előző dián kapcsolatot teremtettünk a koszinusz függvény, és a komplex forgóvektor között. A gyakorlatban ennek segítségével bevezethetők a fazorok. A fazor megmutatja, hogy egy koszinusz függvénynek mekkora az amplitúdója, és milyen fázisban (milyen távol a viszonyítási ponttól) veszi fel a maximumát. A függvényt átírva ilyen alakra, az időfüggő tagok elhagyhatók, és egyszerűbb műveleteket végezni a függvényeken.

Fontos megjegyezni, hogy ez az átalakítás csak szinuszos (koszinuszos) jelekre igaz, és csak akkor összegezhetők, ha mindegyikük eredetileg azonos frekvenciájú volt.

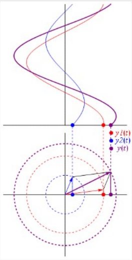
Példa fazorműveletre

$$2\cos(\omega t)+\cos(\omega t+60°)=2+1\,e^{j\,60°}$$

$$2+0{,}5+j\,\frac{\sqrt{3}}{2}=2{,}5+j\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2{,}64\,e^{j\,19{,}1°}=2{,}64\cos(\omega t+19{,}1°)$$

Mi van, ha a jelünk nem szinuszos?



Ez a dia példa a fazorok használatára, és a descartes/polár alakok közötti átalakításra.

Kezdetnek van két azonos frekvenciájú időfüggvényünk különböző amplitúdóval és fázissal. Ezeket fazorokká alakítjuk, hogy ne kelljen a szögfüggvényekkel vesződni. Viszont a fazorok polár alakúak, így az összeadáshoz átírjuk őket descartes alakba az Euler-formula segítségével. Így az összeadás könnyen elvégezhető. A kapott descartes alakú összeget visszaírjuk polár alakba, és ebből a két jel összegének időfüggvényét.

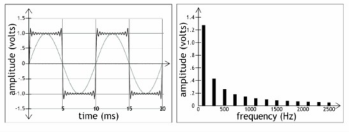
Ez elsőre kerülőútnak tűnhet, de végeredményben egyszerűbb, mintha nekiállnánk a jeleket szögfüggvényes alakjukban összeadni.

Joggal merül fel a kérdés: Mit kezdünk azokkal a jelekkel, amik nem szinuszosak?

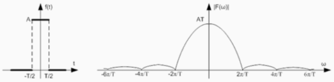
Frekvenciatartomány

Minden jel felbontható
szinuszos jelek összegére

Periodikus jel – Diszkrét frekvenciák



Aperiodikus jel – Folytonos spektrum



Fontos megállapítás jelfeldolgozásban, hogy minden jel felbontható szinuszos jelek összegére. Így bármilyen fura jellel találkozunk is, valamilyen módon (Fourier sorfejtés/transzformáció) visszavezethetjük szinuszos jelekre.

Fontos megjegyezni, hogy különbség van periodikus (időben ismétlődő) és aperiodikus (időben nem ismétlődő) jelek felbontásában:

Periodikus jeleknél diszkrét frekvenciájú összetevőkre bontjuk a jelet, így az alapharmonikus (eredeti jel frekvenciája) és ezen frekvencia egész számú többszörösein rezgő komponenseket kell összegeznünk. Így elméletileg **megszámlálhatóan végtelen** komponensünk van.

Aperiodikus jeleknél a felbontás folytonos, vagyis **megszámlálhatatlanul végtelen** frekvenciát kell vizsgálnunk. Szerencsére ilyen jelekkel általában nem kell foglalkoznunk.

Fourier sor/transzformáció

Frekvenciatartományba

$$G_k^C = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\, e^{-jk\omega t}\, dt$$

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Időtartományba

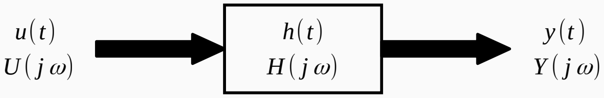
$$g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} G_k^C\, e^{jk\omega t} \qquad k=0;1;2;\dots;$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

A dián a Fourier-sor illetve transzformáció összefüggései láthatóak, illetve, hogy ezekből hogyan állíthatóak vissza az időtartománybeli jelek.

Kérünk mindenkit, hogy ne kezdje el ezeket bemagolni! A lényeg, hogy lássuk, mindenféle jel vizsgálatát vissza tudjuk vezetni szinuszos jelek vizsgálatára.

Rendszerválasz



$$y(t) = h(t) * u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)\,U(j\omega)$$

Miért is jó nekünk a frekvenciatartomány, miért nem maradtunk időtartományban?

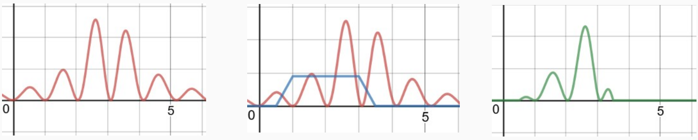
A fenti ábra valamilyen rendszert (mondjuk áramkört, pl. erősítő) ábrázol. Ennek van valamilyen karakterisztikája (viselkedése) amit a *h(t)* időfüggvény ír le. Amennyiben a választ (kimenő jel egy adott bemenő jelre, itt *y(t)*) időtartományban szeretnénk meghatározni, úgy az úgynevezett konvolúció műveletét kell végrehajtanunk, ami nem egy mókás feladat.

Ha viszont a bemenő jelet és a rendszer karakterisztikát is frekvenciatartományban adjuk meg, akkor a frekvenciatartománybeli válasz egyszerű szorzással megkapható, és szükség esetén visszaírható időtartományba.

Akárcsak a fazorokkal, itt is jelentős számolgatást spórolhatunk, annak ellenére, hogy látszólag kerülőúton járunk.

Rendszerválasz példa

$$Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega)$$



Ezen a dián az előző rendszerválasz számításra láthatunk példát.

Itt mindegyik jel frekvenciatartományban van felírva, így a válaszunk (zöld) a bejövő jel (piros) és a rendszerünk karakterisztikája (kék) szorzataként áll elő.

Ez esetben a rendszerünk sáváteresztő jellegű, vagyis két határfrekvencia között átengedi a bejövő jelet, viszont ezen határok felett és alatt elnyomja azt.

Kérdések?

- Matek
  - dB skála
  - Komplex számok
  - Fazorok
  - Fourier-transzformáció

Félidő