

Matematikai alapok és modulációk



Tematika

● Matek

- dB skála
- Komplex számok
- Fazorok
- Fourier-transzformáció

● Modulációk

- Modulációs tétel
- CW
- Fónia: AM, FM
- Digitális: FSK, PSK, QAM
- Analóg képátvitel: SSTV
- IQ (de)moduláció

Decibel skála

Teljesítmény arányok kifejezésére: $a_{dB} = 10 \cdot \lg\left(\frac{P}{P_{ref}}\right)$ pl.: $a_{dB} = 10 \cdot \lg\left(\frac{4\text{ W}}{2\text{ W}}\right) \approx 3\text{ dB}$

Nagy erősítés emberi léptékben pl.: $10 \cdot \lg(10000) = 40\text{ dB}$

A logaritmus művelete szorzást összeadássá alakít: $\lg(a \cdot b) = \lg(a) + \lg(b)$
pl. 10 dB teljesítmény kétszerese 13dB, tízszerese 20 dB

dBm skála: Mindig 1 mW-hoz viszonyítunk (létezik még dBW, dBuV, stb.)

pl. $4\text{ mW} \approx 6\text{ dBm}$ $100\text{ mW} = 20\text{ dBm}$

Komplex számok

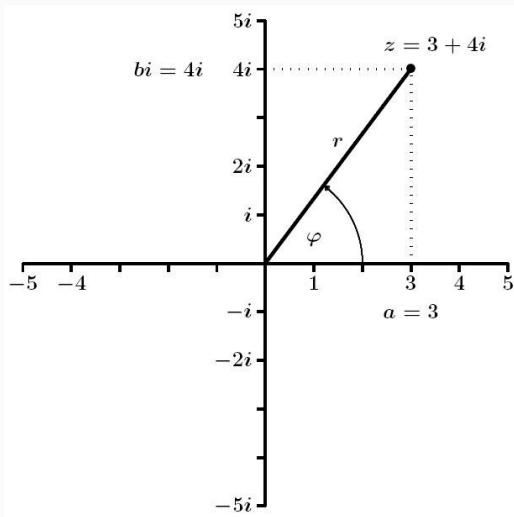
$$\mathbb{C} = \{a + bj | a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$j = 0 + 1 \cdot j = \sqrt{-1}$$

Ez igaz, de most pár percre felejtjük el!

Im-Re sík $\leftrightarrow$ x-y sík

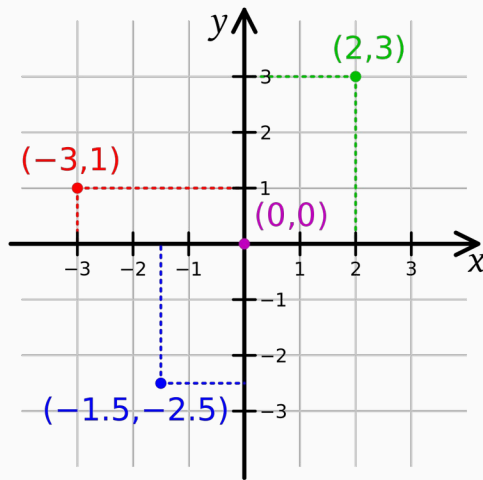
$$3+4i$$



Ortogonalis

bázisvektorok:

$$(1; i)$$

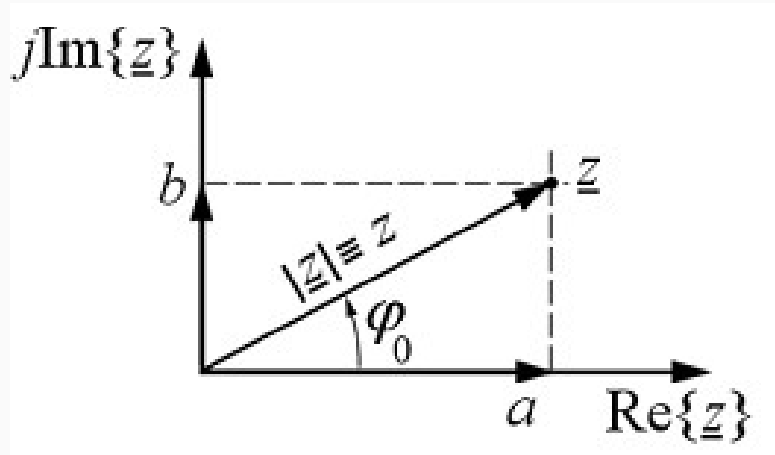


$$2x + 3y$$

$$(x; y)$$

Euler-formula

$$\underline{z} = a + jb = z \cdot (\cos(\varphi_0) + j \sin(\varphi_0)) = z \cdot e^{j\varphi_0}$$



Descartes

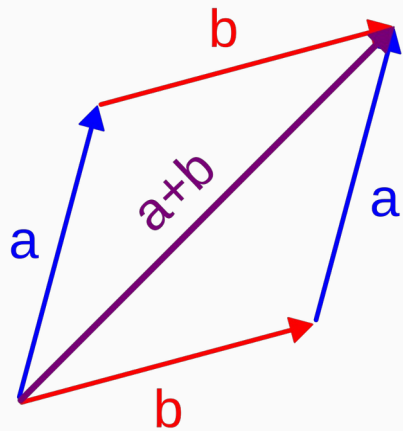
Polár

$$|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi_0 = \text{atan2}(b, a) \approx \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

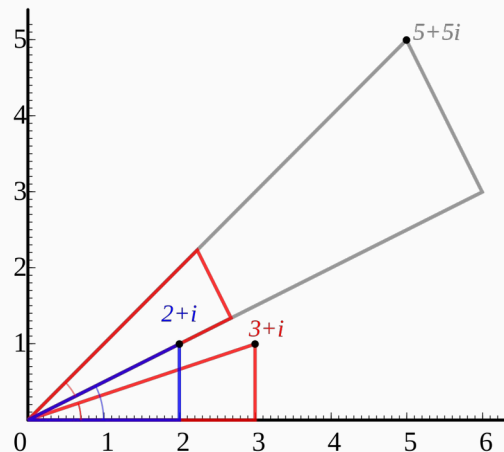
Műveletek komplex számokkal

Összeadás



$$(a+jb)+(c+jd)=(a+c)+j(b+d)$$

Szorzás



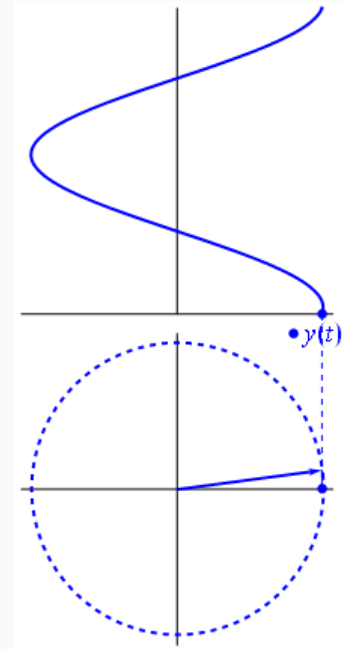
$$e^{j\alpha} \cdot e^{j\beta} = e^{j(\alpha+\beta)}$$

Komplex forgóvektor

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

$$\operatorname{Im}\{e^{j\omega t}\} = \sin(\omega t)$$

$$\operatorname{Re}\{e^{j\omega t}\} = \cos(\omega t)$$



Fazorok (komplex csúcsérték)

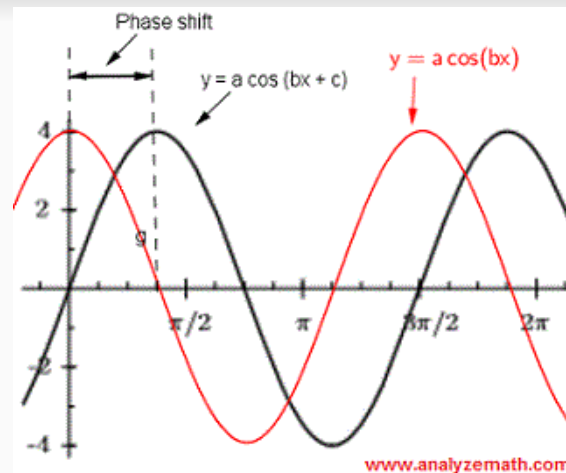
$$u(t) = U \cdot \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \bar{U} = U \cdot e^{j\varphi}$$

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \Leftrightarrow \bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2$$

$$x(t) = K \cdot u(t) \Leftrightarrow \bar{X} = K \cdot \bar{U}$$

$$y(t) = u'(t) \Leftrightarrow \bar{Y} = j\omega \bar{U}$$

Csak szinuszos jeleknél!



$$a \cos(bx) \Leftrightarrow a e^{j0} = a$$

$$a \cos(bx + c) \Leftrightarrow a e^{jc}$$

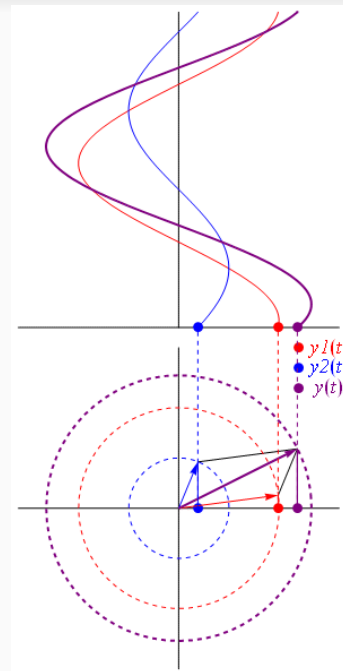
Példa fazorműveletre

$$2 \cos(\omega t) + \cos(\omega t + 60^\circ) = 2 + 1 e^{60^\circ}$$

$$2 + 0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2,64 e^{j\omega t + 19,1^\circ} = 2,64 \cos(\omega t + 19,1^\circ)$$

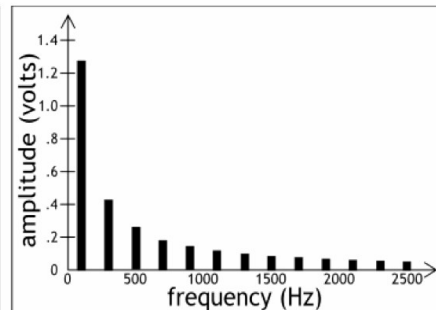
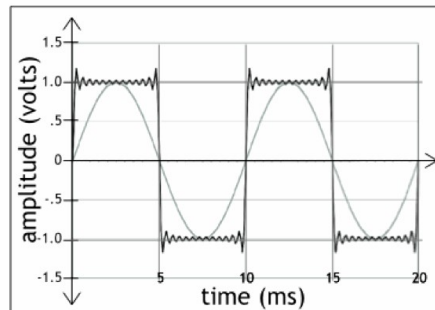
Mi van, ha a jelünk nem szinuszos?



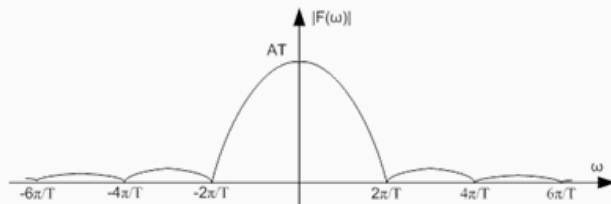
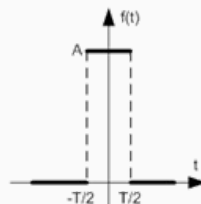
Frekvenciatartomány

Periodikus jel – Diszkrét frekvenciák

Minden jel felbontható
szinuszos jelek összegére*



Aperiodikus jel – Folytonos spektrum



Fourier sor/transzformáció

Frekvenciatartományba

$$G_k^C = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-jk\omega t} dt$$

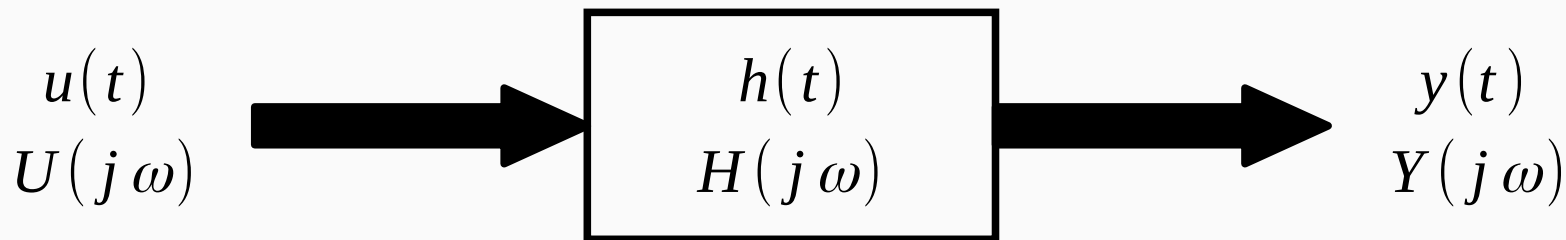
$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

Időtartományba

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k^C e^{jk\omega t} \quad k=0;1;2;\dots;$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Rendszer válasza

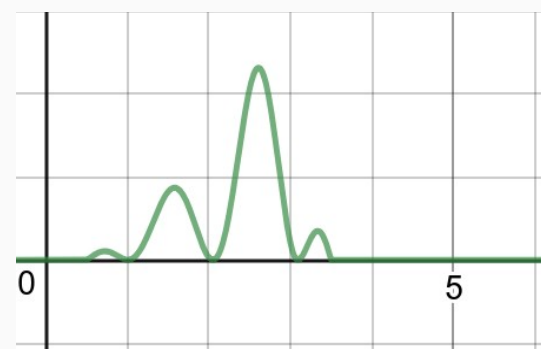
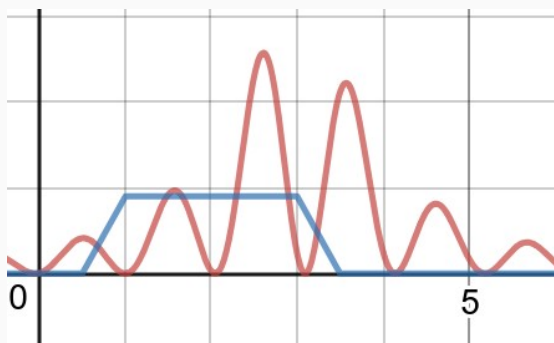
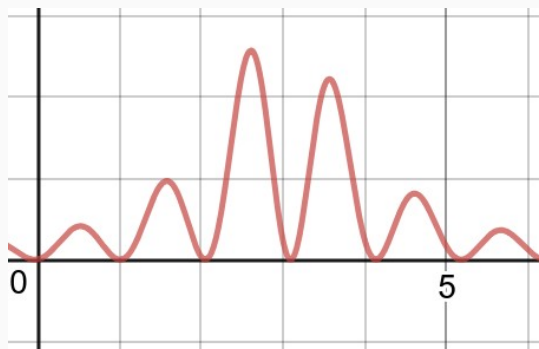


$$y(t) = h(t) * u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) U(j\omega)$$

Rendszer válasz példa

$$Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega)$$



Modulációs tétel

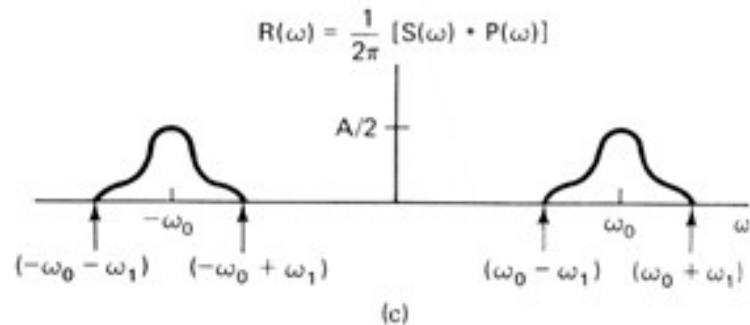
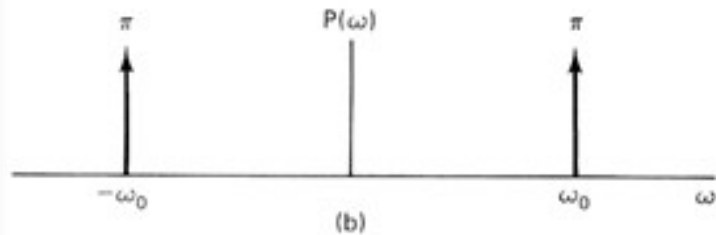
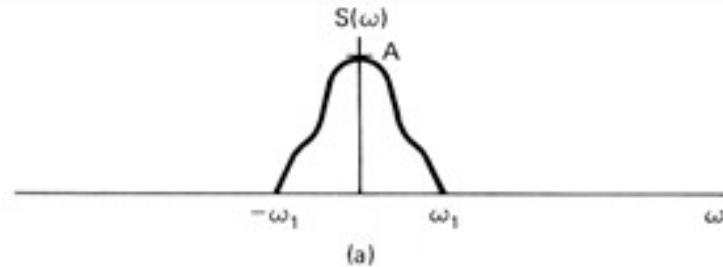
$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)$$

$$\cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + \frac{1}{2} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]$$

Két jel szorzatában a frekvenciáik különbsége és összege jelenik meg

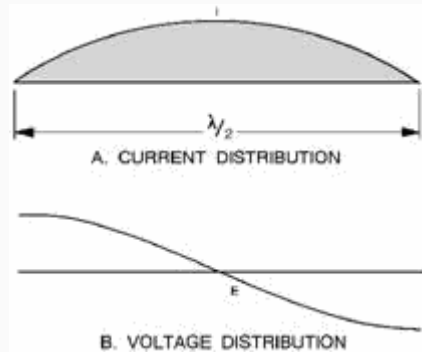
Frekvenciatartománybeli eltolás!

Modulációs tétel spektrumábrán

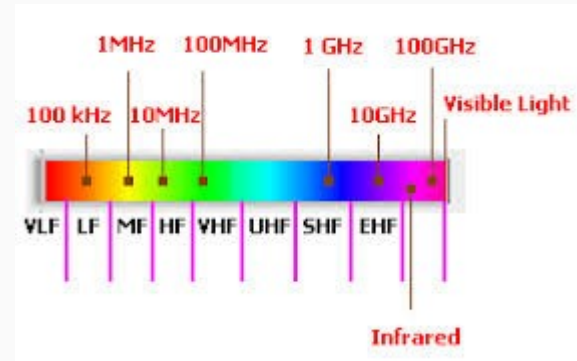


Miért modulálunk?

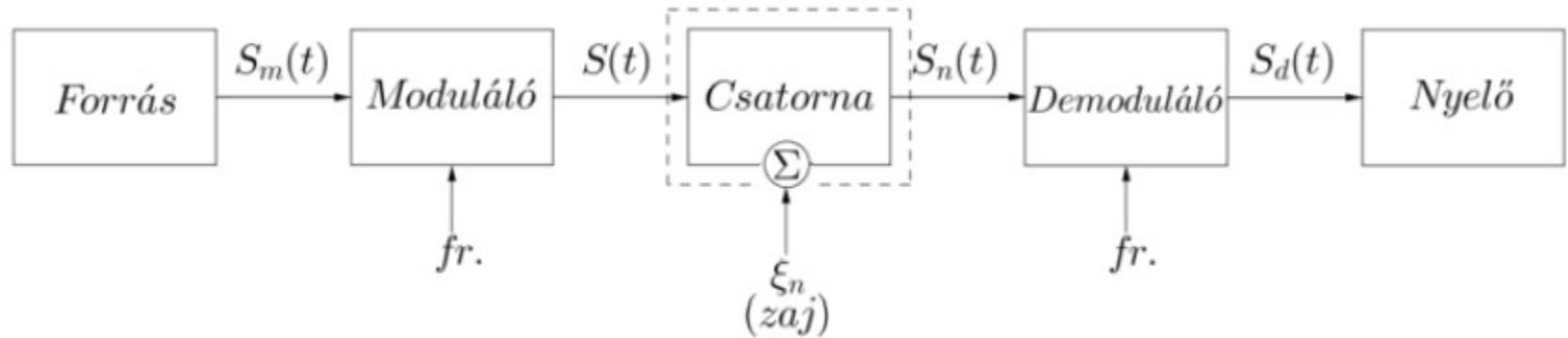
Kisebb antennák használata



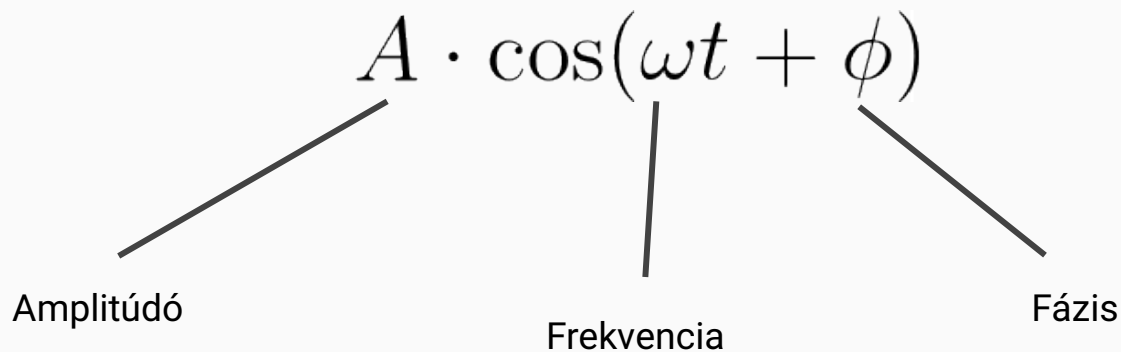
EM spektrum teljes kihasználása



Információátvitel blokkdiagram



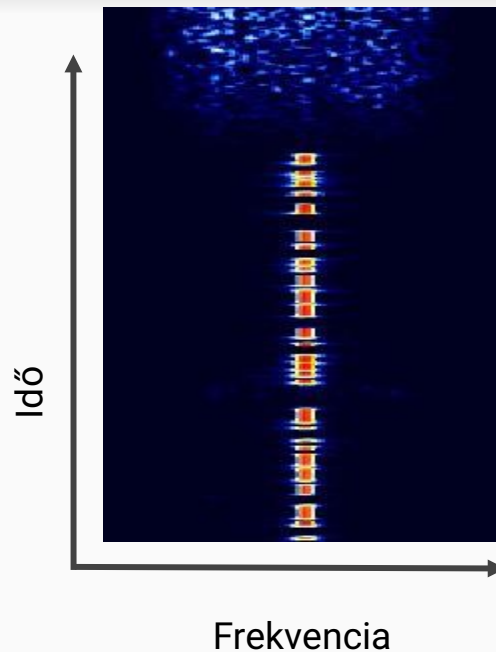
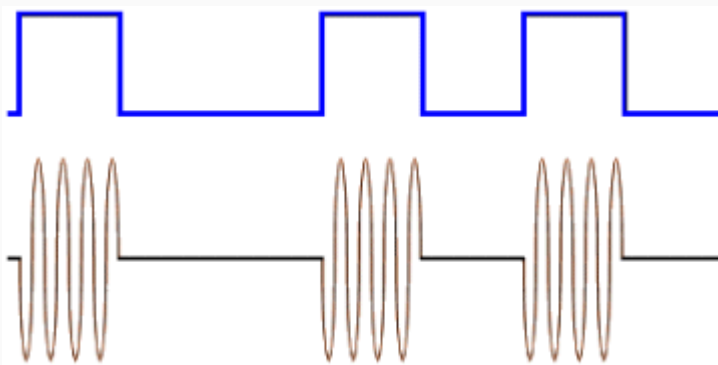
Modulációs lehetőségek



CW

Continuous Wave, Morze

Két szintű amplitúdó billentyűzés (ASK)



CW, Morze



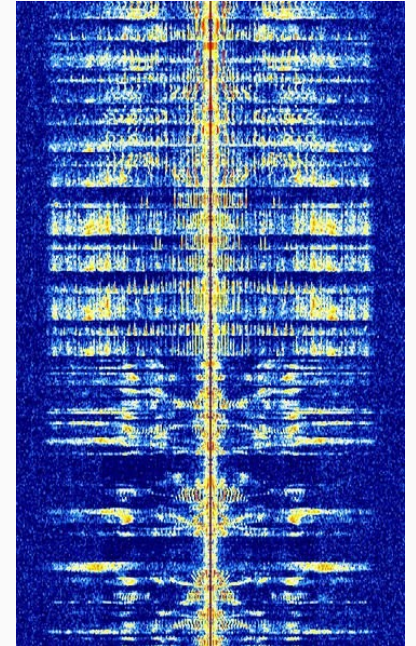
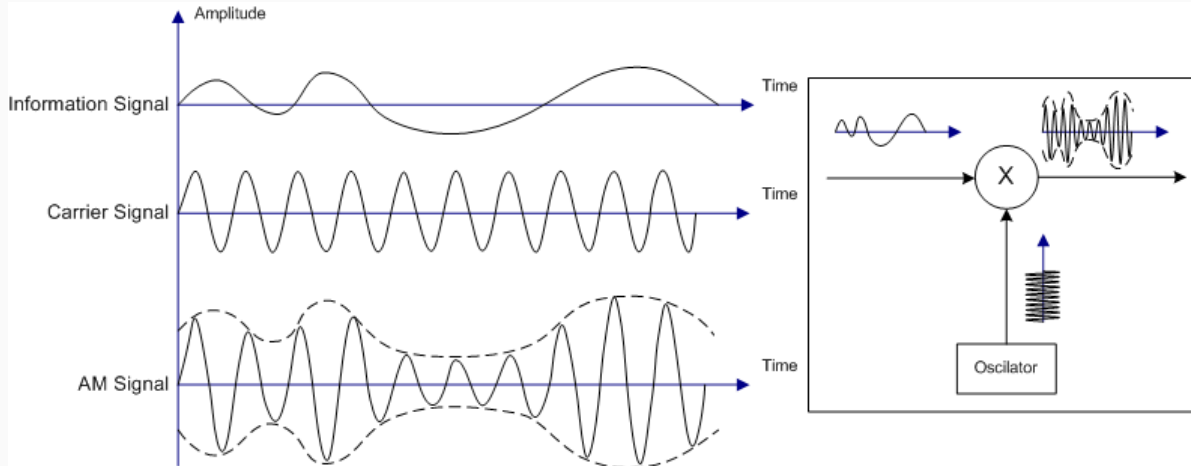
International Morse Code

1. The length of a dot is one unit.
2. A dash is three units.
3. The space between parts of the same letter is one unit.
4. The space between letters is three units.
5. The space between words is seven units.

A	• —	U	• • —
B	— • • •	V	• • — —
C	— • — •	W	• — — —
D	— • •	X	— • • —
E	•	Y	— • — —
F	• • — •	Z	— — • •
G	— • •		
H	• • • •		
I	• •		
J	• — — —		
K	— • • —	1	• — — — —
L	— • • •	2	• • — — —
M	— —	3	• • • — —
N	— •	4	• • • • —
O	— — —	5	• • • • •
P	• — — •	6	— • • • •
Q	— — • —	7	— — • • •
R	• — • •	8	— — — • •
S	• • •	9	— — — — •
T	—	0	— — — — —

AM-DSB

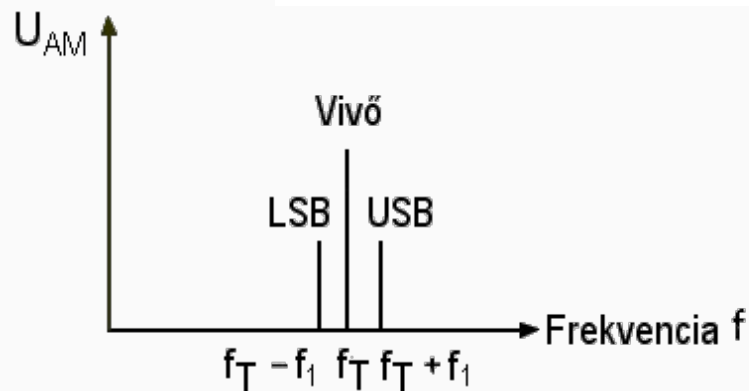
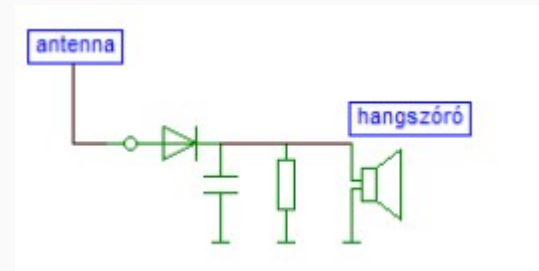
$$y(t) = [1 + m \cdot \cos(2\pi f_m t + \varphi)] A \sin(2\pi f_v t)$$



AM-DSB

Demodulálás: Csúcsdetektorral
Rendkívül egyszerű: Tömeges elérés
Additív zajra érzékeny

Rossz spektrumhatékonyság



AM-SSB

Az AM két oldasávja ugyan azt az információt hordozza
Nyomjuk el az egyiket (meg a vivőt is)!

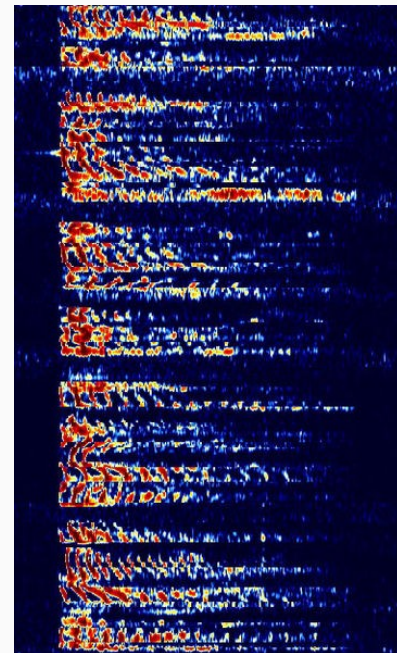
Single Side Band

- LSB: alsó marad
- USB: felső marad

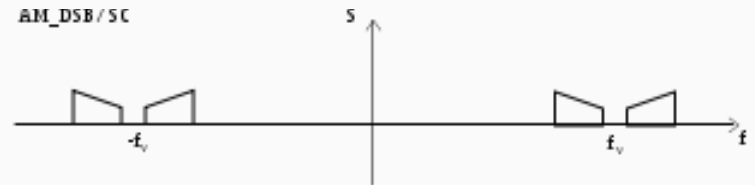
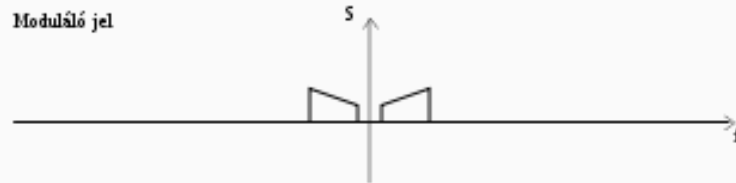
Kevesebb sávszélesség

Rosszabb minőség

Nehezebb demodulálás



Amplitúdó modulációk típusai



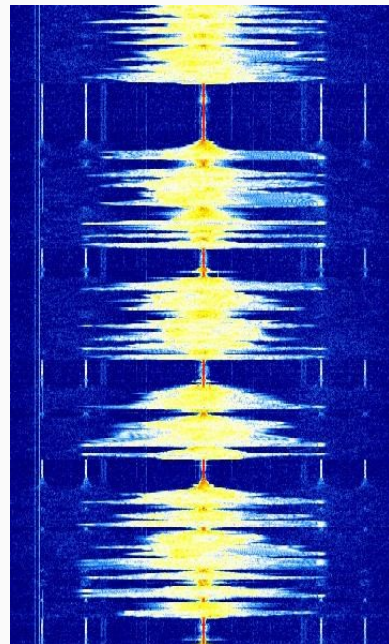
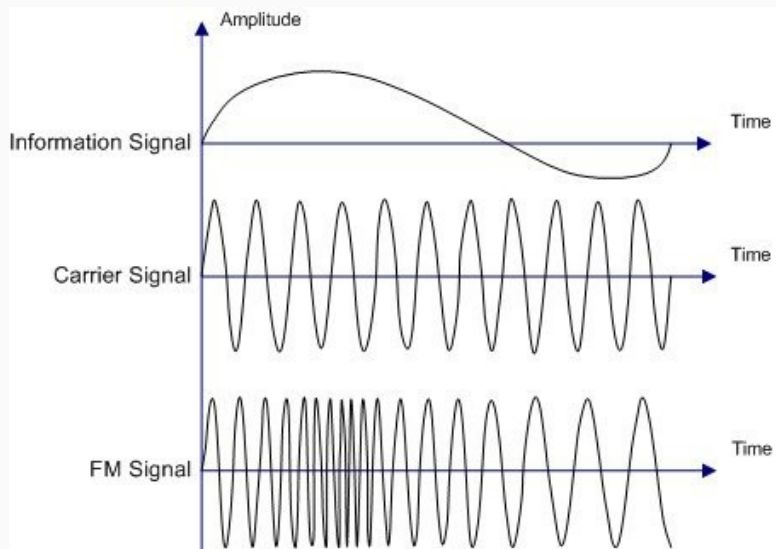
FM – Frekvencia moduláció

A frekvencia változik a moduláló jel függvényében

Jó a zajtűrése

Demodulálás:
Fáziszárt hurokkal

Hasonló a
fázismodulációhoz
(PM)



Digitális modulációk

Analóg jel helyett biteket viszünk át

Szimbólumok: egyszerre egy szimbólum megy át, ez kódolhat több bitet
Pl. 4 különböző szimbólum: 2 bit/sym

Baud ráta: Szimbólumsebesség (sym/sec)

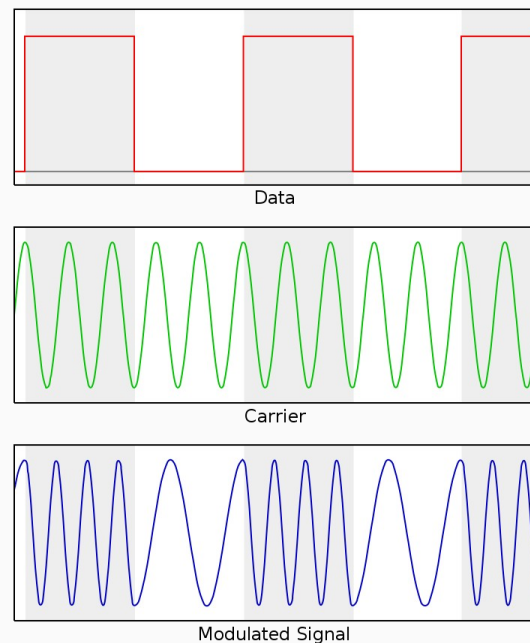
Bitráta: Bitsebesség = sym/sec * bit/sym = bit/sec
(Szimbólumsebesség * Szimbólum által kódolt bitszám)

FSK – Frequency Shift Keying

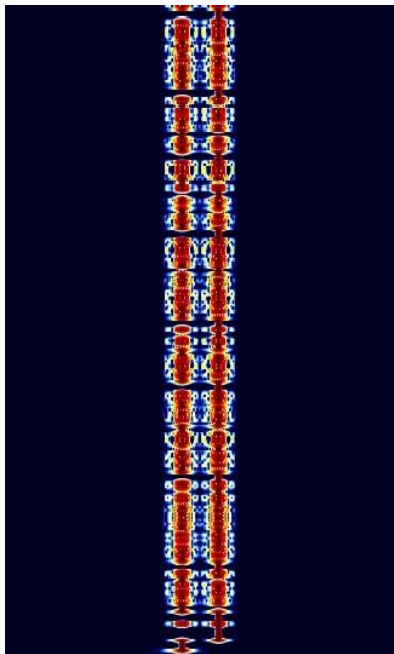
Frekvencia billentyűzés

Egy szimbólum: adott frekvenciájú jel

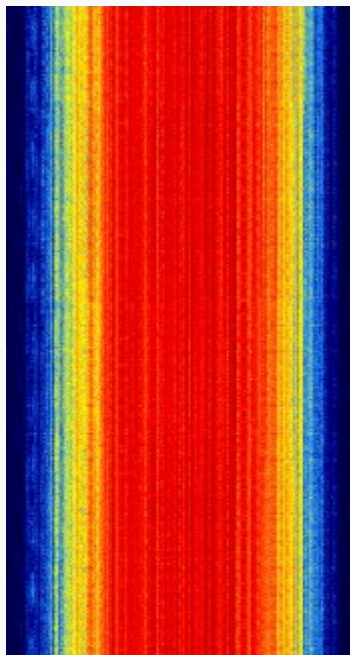
Relatív frekvenciák és a baud rate határozzák meg a pontos módot



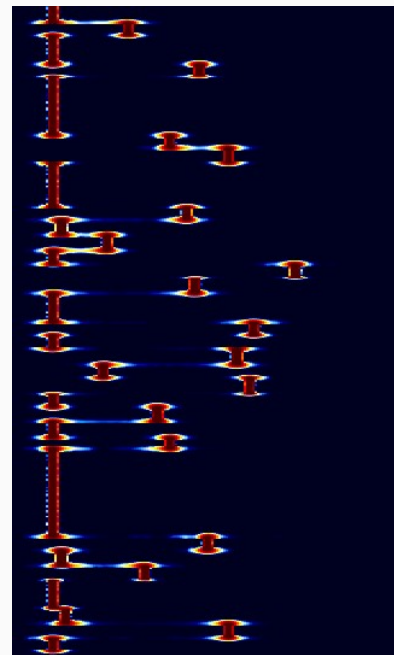
FSK vízésés diagramok



Radio teletype
RTTY, rütyütyü



GMSK (képen GSM)
Gaussian Minimum Shift
Keying



JT65C2

PSK – Phase Shift Keying

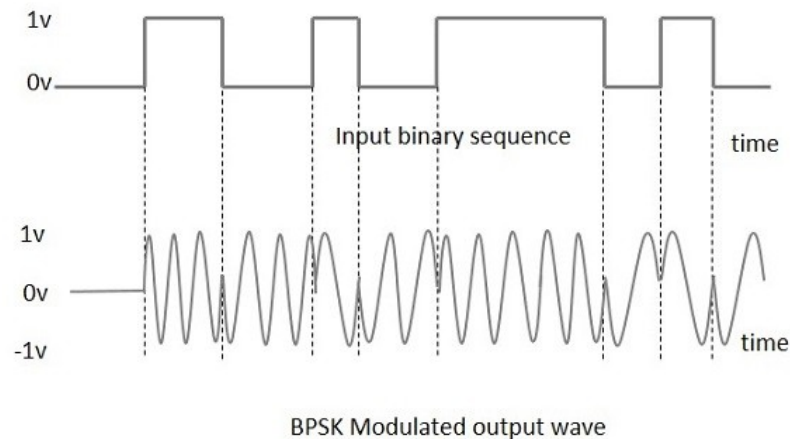
Fázisbillentyűzés

Egy szimbólum: adott fázisú jel

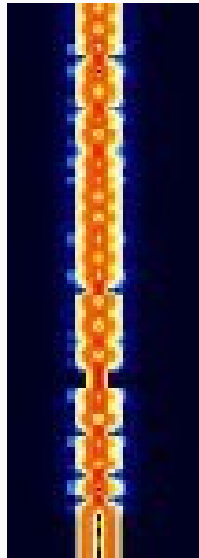
A fázis relatív => ref szimbólum/diff kódolás

Szimbólumok számától függően

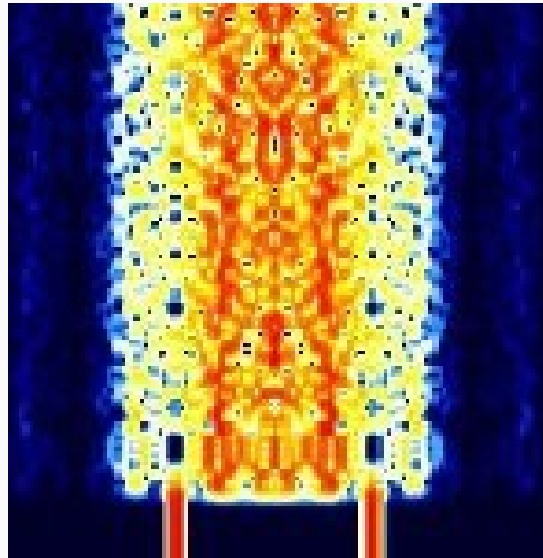
BPSK, QPSK, 8PSK



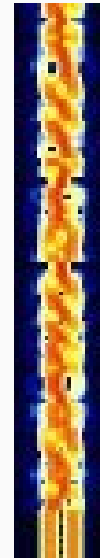
PSK – Vízesés diagramok



BPSK31



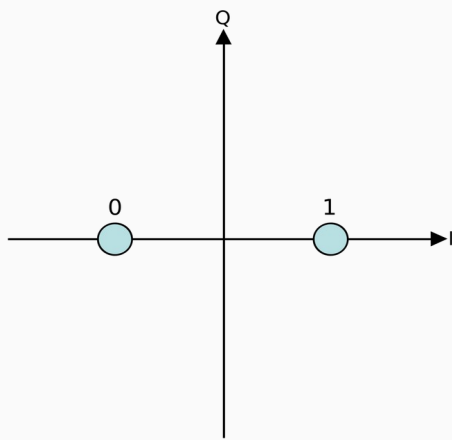
BPSK250



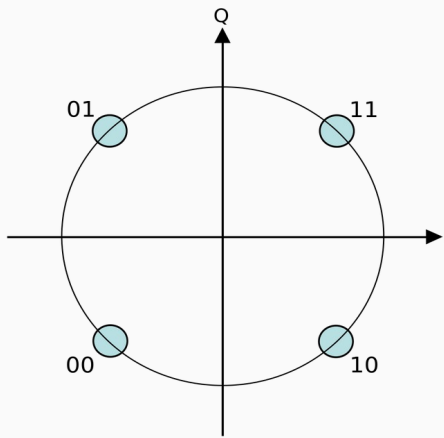
QPSK31

PSK - Konstellációs diagramok

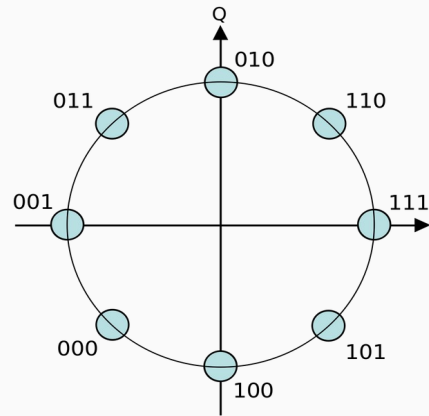
PSK esetén a fázor fázisa tartalmaz minden információt
Ábrázoljuk a szimbólumokhoz tartozó fázorokat:



BPSK



QPSK



8PSK

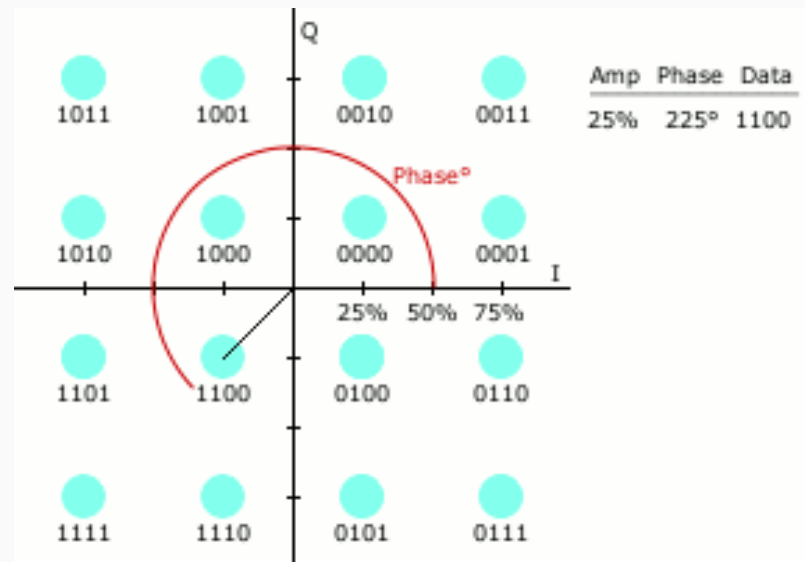
QAM – Quadrature Amplitude Modulation

Kvadratúra Amplitúdó Moduláció

Van még hely a konstelláció ábrán
Külön külön amplitudó moduláljuk I-t és Q-t

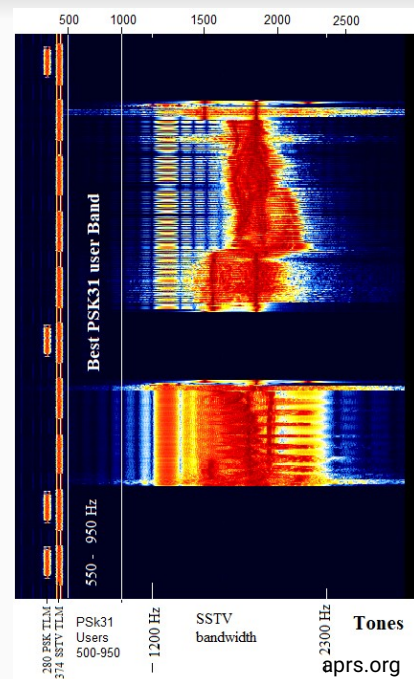
16, 64, 256 QAM

DOCSIS, WiFi, DVB-T/S stb.



SSTV – Slow Scan Television

Analóg képátvitel alacsony sávszélességen, 1-2 perc alatt
50-es évektől, űrszondákon
Jellemzően HF sávokon (DX), vagy VHF/UHF sávokon



IQ Jelek

Hogyan is állnak elő az előző konstellációs diagramok?

$$\underbrace{[(U_v + m(t)) \cdot \cos(\omega_v t)]}_{\text{Modulált jel}} \cdot 2 \cos(\omega_v t + \phi) = \underbrace{(U_v + m(t))}_{\text{Alapsáv}} \cdot \underbrace{\cos(\phi)}_{\text{Alapsáv}} + \underbrace{(U_v + m(t)) \cdot \cos(2\omega_v t + \phi)}_{\text{Kétszeres frekvencia (kiszűrjük)}}$$

Szorzó demodulátor

Skálázási tényező

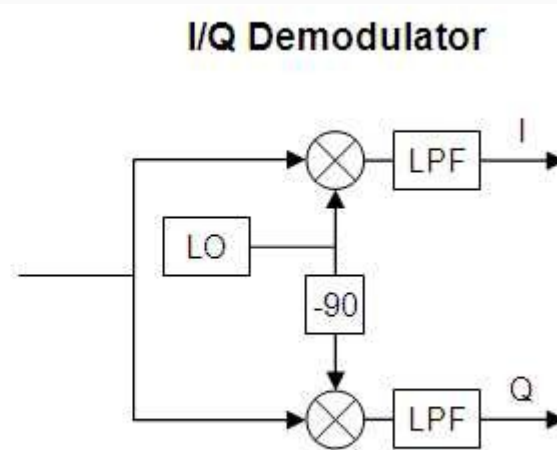
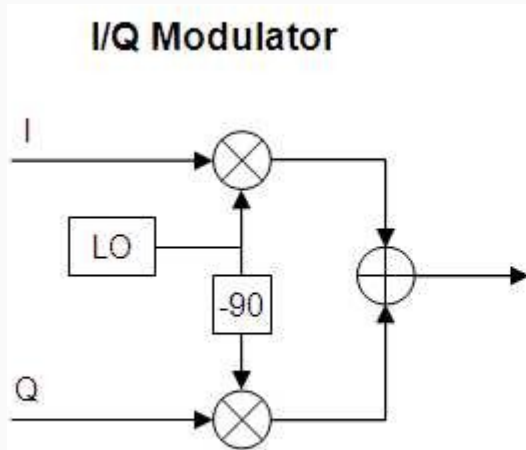
IQ jelek

$$A \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow \frac{1}{2} A$$

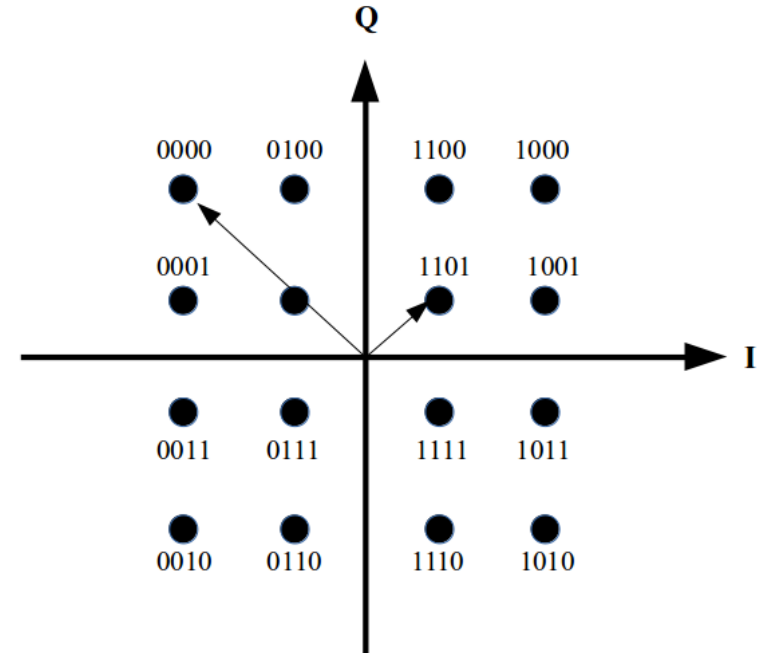
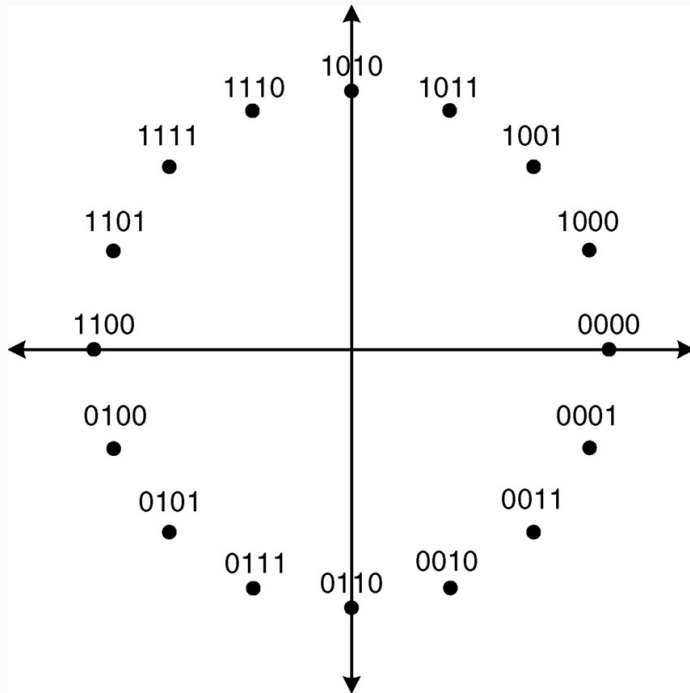
$$A \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow \frac{1}{2} A$$

$$A \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow 0$$

$$A \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow 0$$



Most már értjük a konstellációs diagramot



Szoftverrádió elmélet

$$\begin{array}{c} A(t) \cdot \sin[\omega t + \phi(t)] \\ \Downarrow \\ \underbrace{A(t) \cdot \sin(\omega t) \cos[\phi(t)]}_{\text{Fázis}} + \underbrace{A(t) \cdot \cos(\omega t) \sin[\phi(t)]}_{\text{Kvadratúra}} \end{array}$$

Tetszőleges szinuszos jel felbontható fázis-kvadratúra komponensekre
IQ (de)modulátor + Digitális jelfeldolgozás = Szoftverrádió

RTL-SDR szoftverrádió



Szoftverrádiós gyakorlat a
tanfolyam vége felé

Saját FM demodulátor írása

Addig is lehet szoftverrádiózni:
teto.sch.bme.hu

Összefoglalás – Kérdések?

● Matek

- dB skála
- Komplex számok
- Fazorok
- Fourier-transzformáció

● Modulációk

- Modulációs tétel
- CW
- Fónia: AM, FM
- Digitális: FSK, PSK, QAM
- Analóg képátvitel: SSTV
- IQ (de)moduláció