

# Matematikai alapok

## Jelfeldolgozás és modulációk



# Tematika

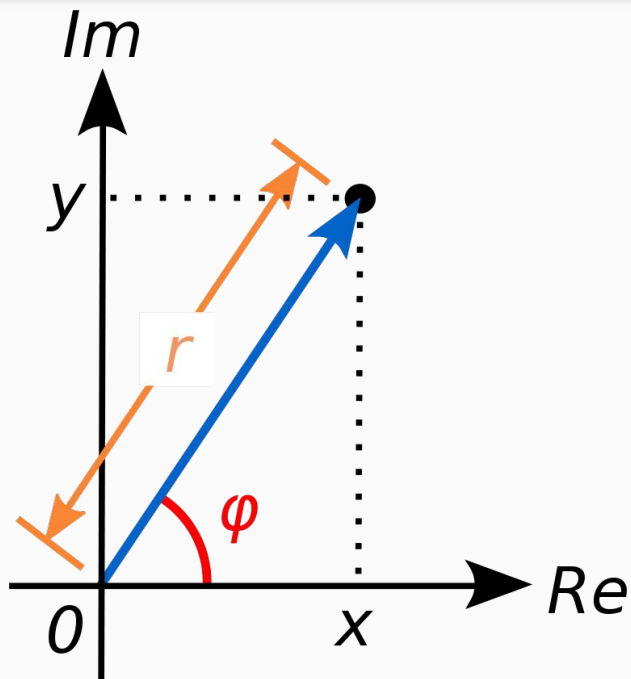
- Matek
  - Komplex számok
  - Fazorok
  - Fourier transzformáció, frekvencia tartomány
  - a dB skála
  - Szűrők alapelve
  - Modulációs tétel
- Jelfeldolgozás, modulációk
  - CW
  - Fónia: AM, SSB, FM
  - Digitális: FSK, PSK, QAM
  - Analóg képátvitel: SSTV, ATV

# Komplex számok

$$\mathbb{C} = \{a + bj | a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$j = 0 + 1 \cdot j = \sqrt{-1}$$

# Komplex számok

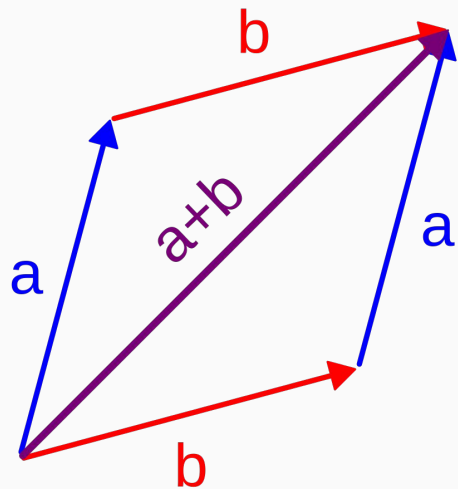


$$a + bj = A \cdot (\cos \theta + j \sin \theta)$$

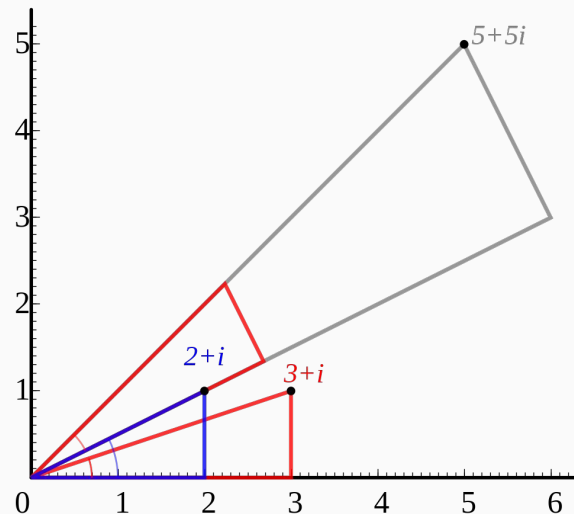
$$\theta = \text{atan2}(b, a) \approx \arctan \frac{b}{a} \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

# Komplex számok

Összeadás: vektor összeg

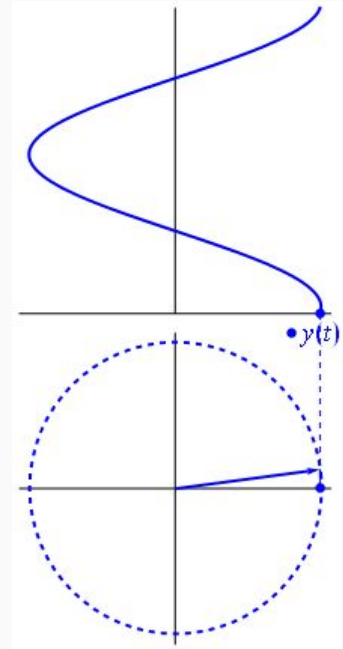


Szorzás: forgatás és skálázás



# Fazorok

$$e^{j\omega t} \quad \begin{aligned} \operatorname{Im}(e^{j\omega t}) &= \sin(\omega t) \\ \operatorname{Re}(e^{j\omega t}) &= \cos(\omega t) \end{aligned}$$



# Fazorok

Általános koszinuszos jel

Három paraméter:

- amplitudó
- frekvencia
- fázis

$$A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

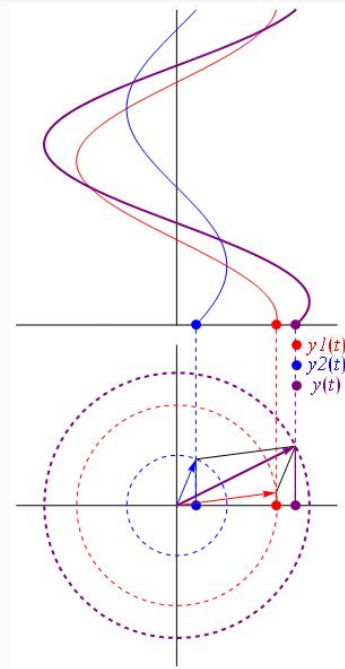
Kettőt összevonhatunk egy komplex számmá!

# Fazorok

$$\operatorname{Re}(z \cdot e^{j\omega t}) = |z| \cdot \cos(\omega t + \arg z)$$

$$z \cdot e^{j\omega t} + w \cdot e^{j\omega t} = (z + w) \cdot e^{j\omega t}$$

$$a \cdot \cos(\omega t + \alpha) + b \cdot \cos(\omega t + \beta) = \text{WTF}$$





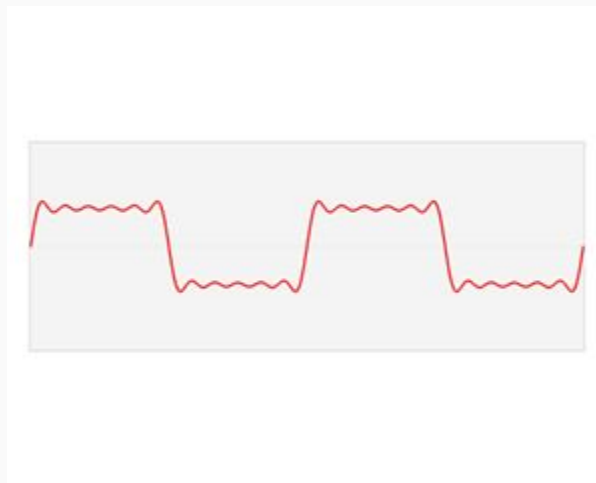
# Fourier transzformáció

Minden\* jelet felbonthatunk szinuszos jelek összegére.

Felbontás: Fourier trafó

Visszaállítás: inverz Fourier trafó

időtartomány  $\leftrightarrow$  frekvenciatartomány



# Fourier transzformáció

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

# A logaritmikus skála

Arányokat ábrázolunk rajta. (Arányok logaritmusát) Nagy teljesítmény különbségek arányához hasznos.

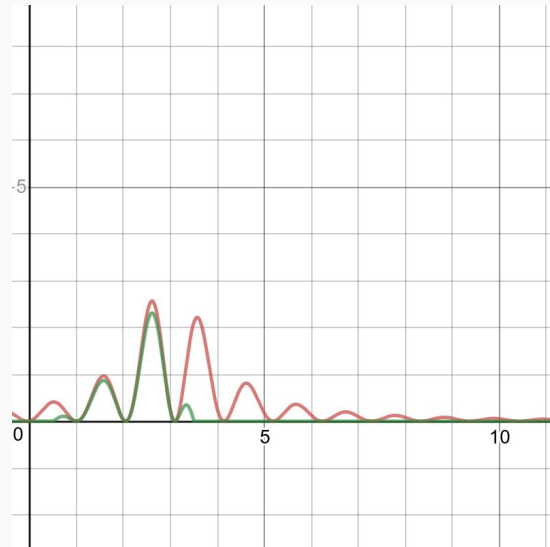
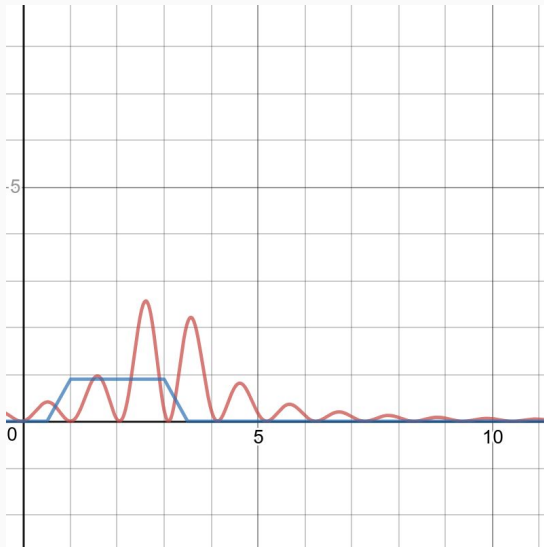
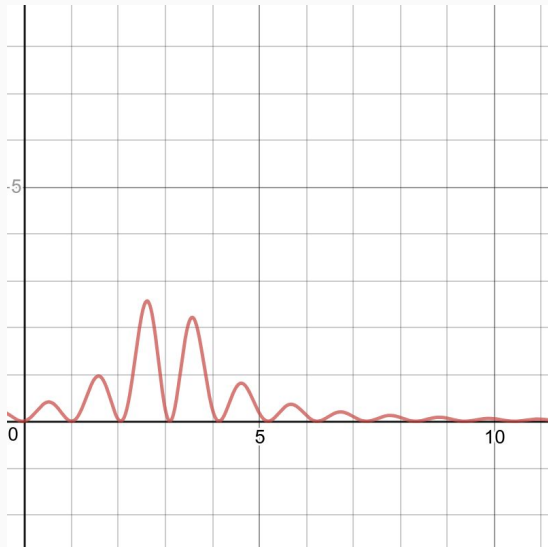
$$a_{\text{dB}} = 10 \cdot \log(P_{\text{ki}}/P_{\text{be}})$$

(jelek arányánál a 10-szeres szorzóból 20-szoros lesz, a log azonosságok miatt)

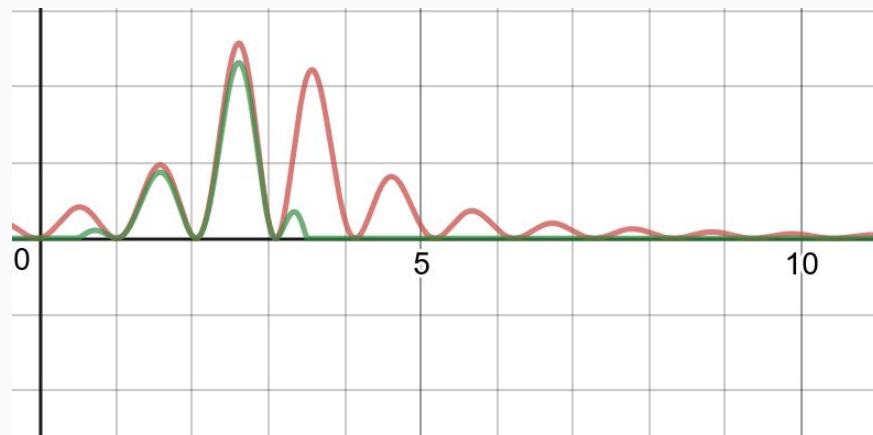
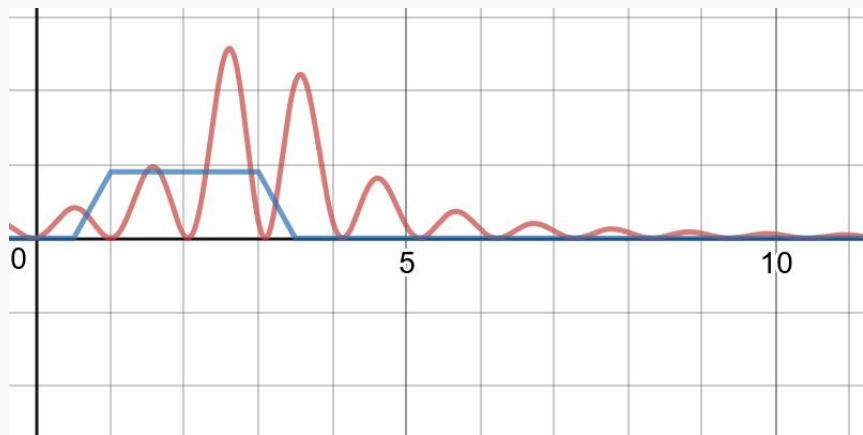
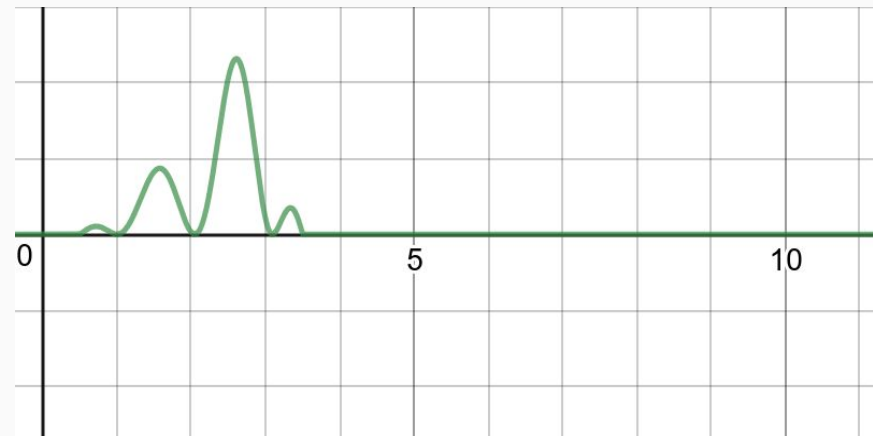
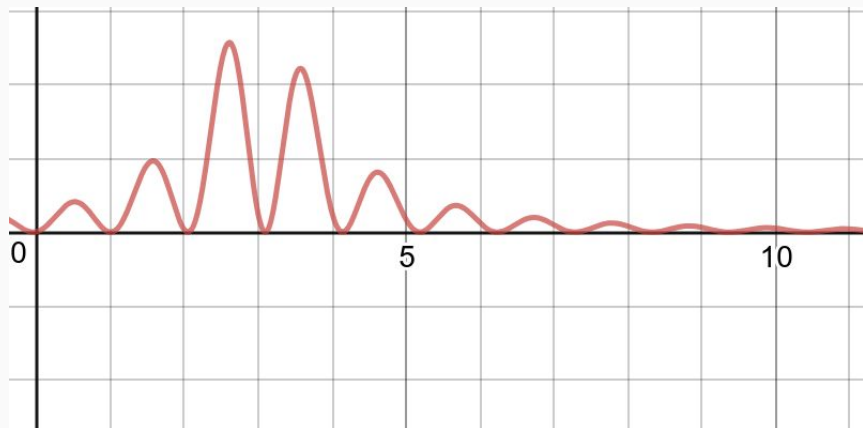
Jel mértékegysége dBm -> 1mW-hoz viszonyított jelteljesítmény

# Szűrők alapelve

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$



# Szűrők alapelve



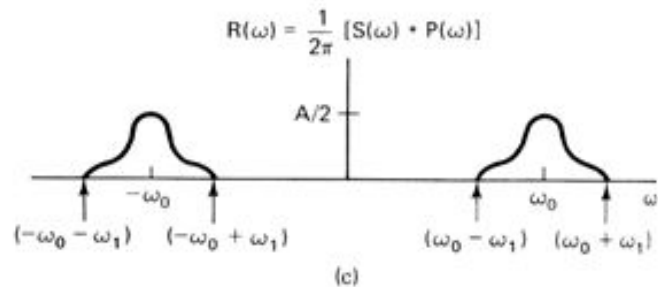
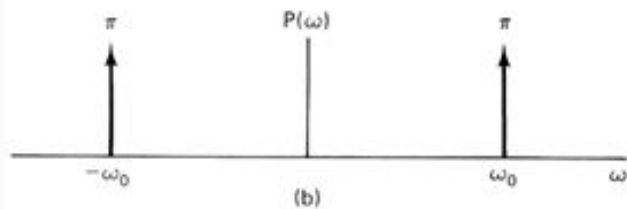
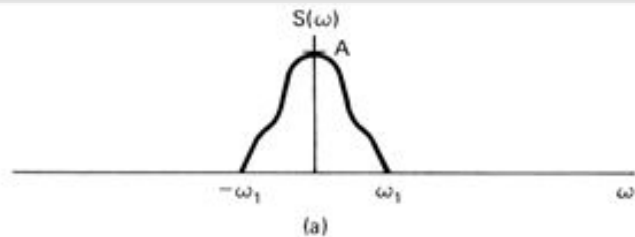
# Modulációs tétel

$$\cos(a) * \cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a + b) + \frac{1}{2}\cos(a - b)$$

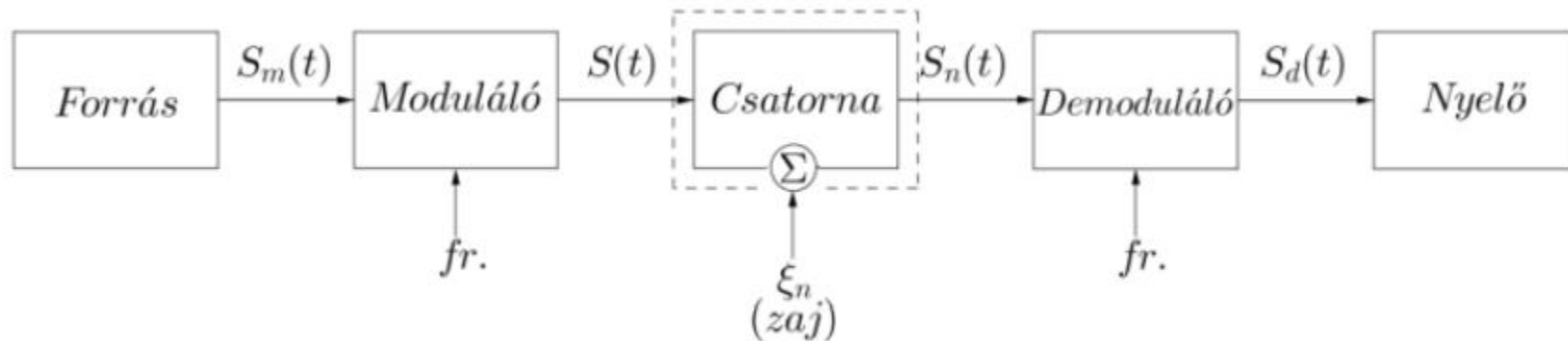
$$\cos(w_1 t) * \cos(w_2 t) = \frac{1}{2}\cos(w_1 t + w_2 t) + \frac{1}{2}\cos(w_1 t - w_2 t)$$

Két jel szorzatában a frekvenciáik különbsége és összege jelenik meg.

# Modulációs tétel

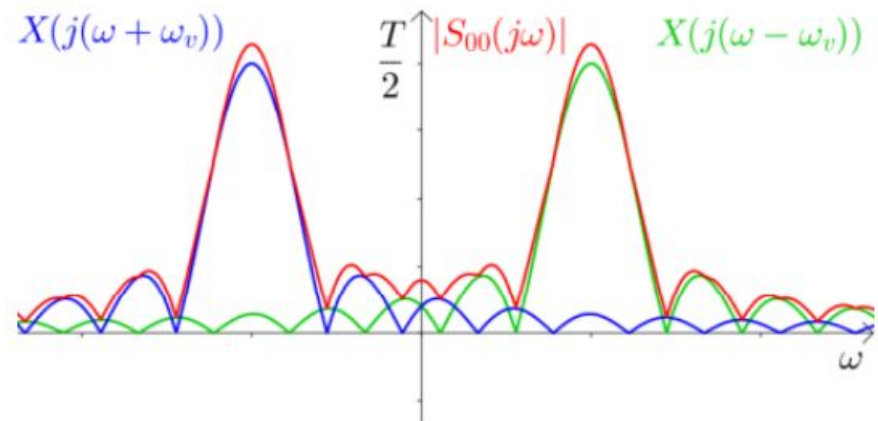
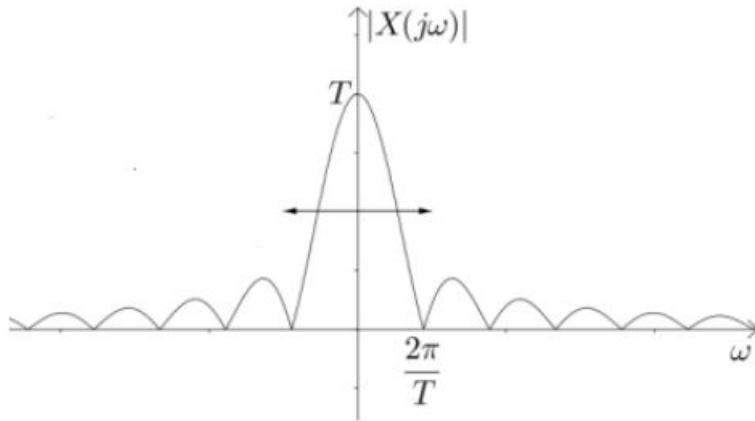


# Jelfeldolgozás





# Hiba - Átlapolódás



# Modulációk

$$A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

The diagram illustrates the components of the cosine wave equation  $A \cdot \cos(\omega t + \phi)$ . Three lines point from the labels below to the corresponding parts of the equation: a line from 'Amplitúdó' to 'A', a line from 'Frekvencia' to ' $\omega t$ ', and a line from 'Fázis' to ' $\phi$ '.

Amplitúdó

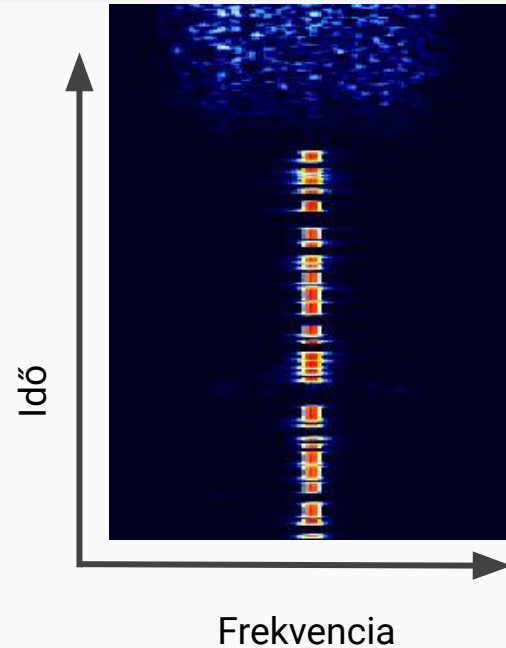
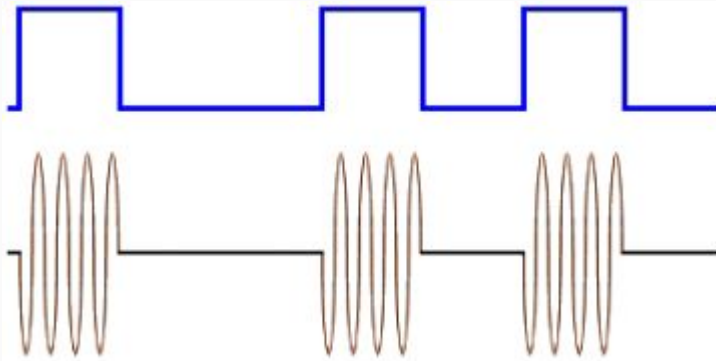
Frekvencia

Fázis

# Modulációk - CW

Continuous wave, Morze

Két szintű amplitúdó shift keying (ASK)



# Modulációk - CW



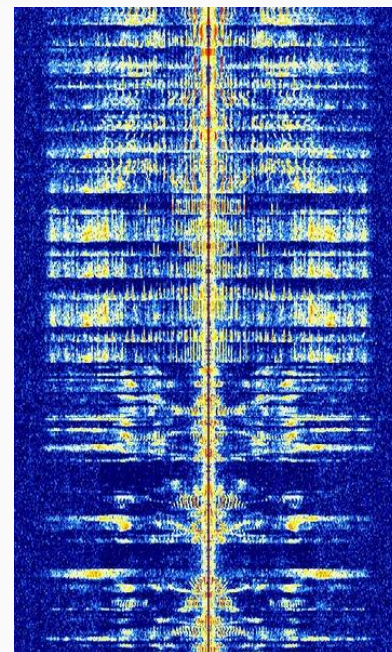
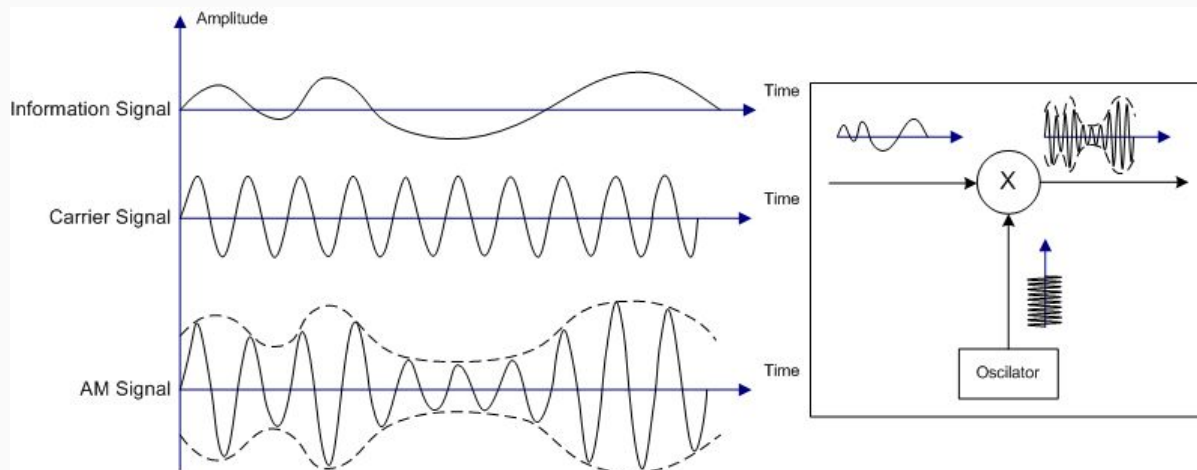
## International Morse Code

1. The length of a dot is one unit.
2. A dash is three units.
3. The space between parts of the same letter is one unit.
4. The space between letters is three units.
5. The space between words is seven units.

|   |           |   |           |
|---|-----------|---|-----------|
| A | • —       | U | • • —     |
| B | — • • •   | V | • • — —   |
| C | — • — •   | W | • — — —   |
| D | — • • •   | X | — • • —   |
| E | •         | Y | — • — —   |
| F | • • — •   | Z | — — • •   |
| G | — • — •   |   |           |
| H | • • • •   |   |           |
| I | • •       |   |           |
| J | • — — — — |   |           |
| K | — • • — — | 1 | • — — — — |
| L | • • — • • | 2 | • • — — — |
| M | — — •     | 3 | • • • — — |
| N | — •       | 4 | • • • • — |
| O | — — —     | 5 | • • • • • |
| P | • — — • • | 6 | — • • • • |
| Q | — — • • — | 7 | — — • • • |
| R | • • • •   | 8 | — — — • • |
| S | • • •     | 9 | — — — • • |
| T | —         | 0 | — — — — — |

# Modulációk - AM

Fónia: Hangátvitelre

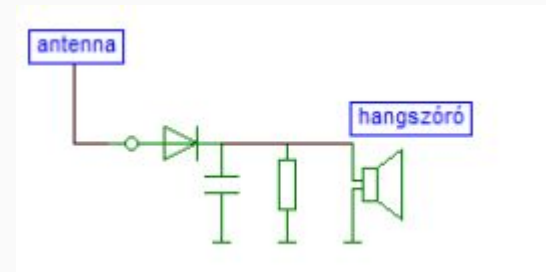


# Modulációk - AM

Egyszerű!!!

Van vivőtartalma: elpazarolt energia cserébe 1 db dióda a demod  
Modulációs tétel => két oldalsávon megjelenik a hangspektrum  
Felesleges sávszélességet foglal

Minőség hagy kívánnivalót maga után



# Modulációk - SSB

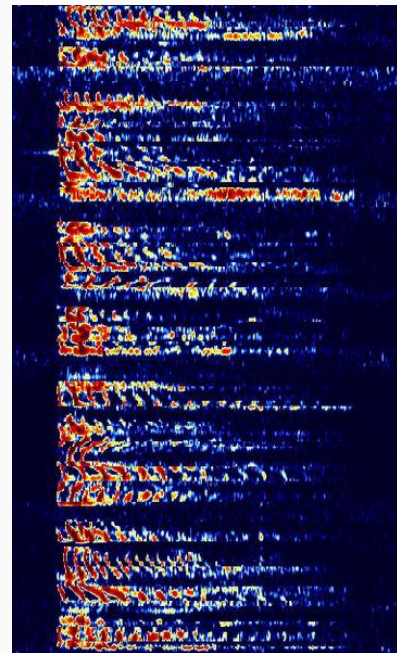
Az AM két oldasávja ugyan azt az információt hordozza!  
Nyomjuk el az egyiket (meg a vivőt is)

Single side band

LSB: alsó marad

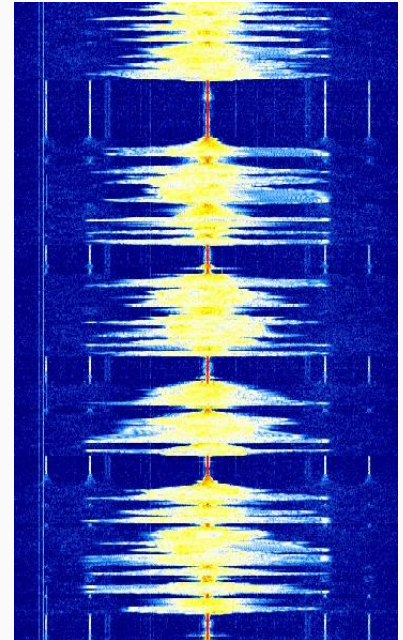
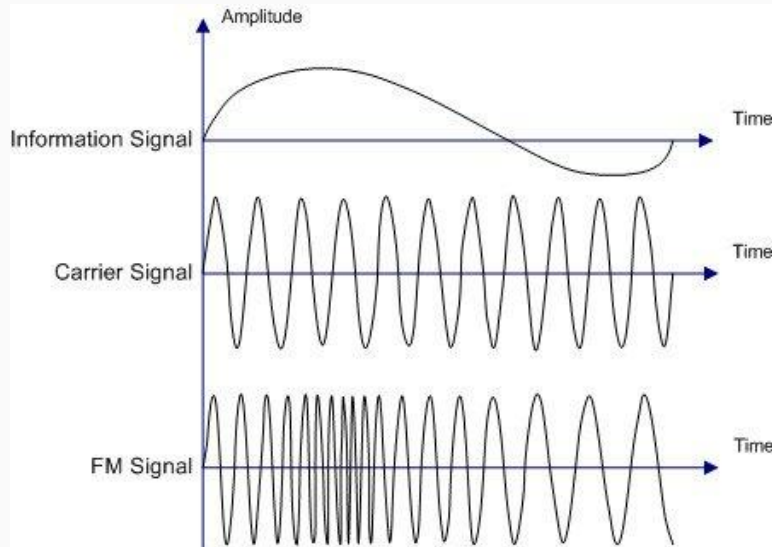
USB: felső marad

Kevesebb sávszélesség, rosszabb minőség  
Félrehangolás probléma



# Modulációk - FM

Amplitudó helyett a frekvencia változik a hang függvényében





# Modulációk - Digitális

Analóg jel helyett biteket viszünk át

Szimbólumok: egyszerre egy szimbólum megy át, ez kódolhat több bitet.

Pl. 4 különböző szimbólum: 2 bit/sym

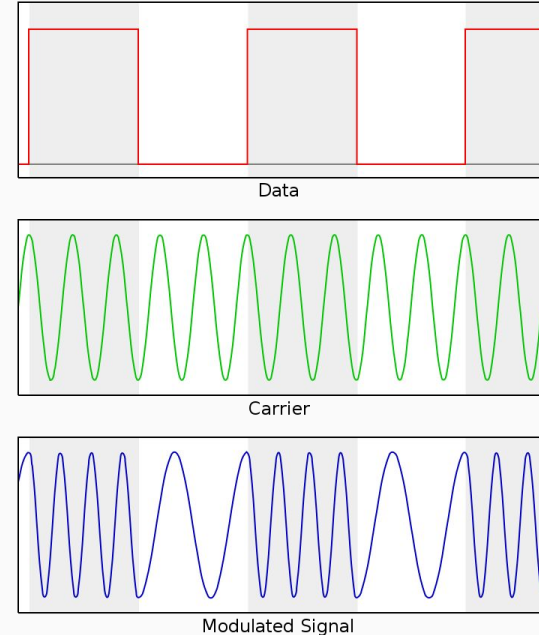
Bitrate: baud rate (sym/s) \* bit/sym

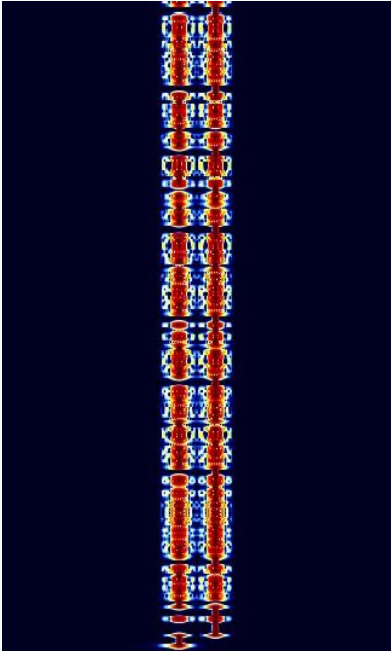
# Modulációk - FSK

Frequency shift keying

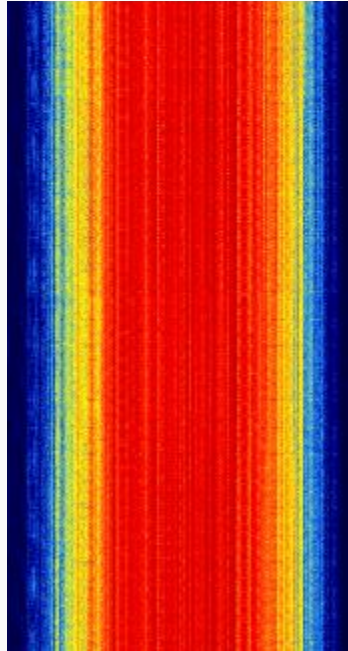
Egy szimbólum: adott frekvenciás jel.

Relatív frekvenciák és a baud rate határozzák meg a pontos módot.

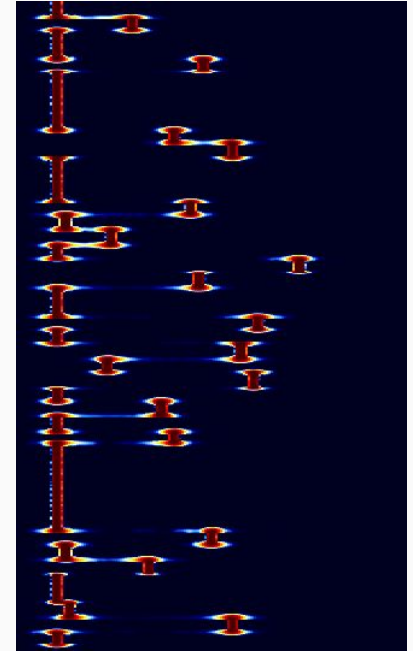




Radio teletype  
RTTY, rütyütyü



GMSK (képen GSM)  
Gaussian minimum shift  
keying



JT65C2

# Modulációk - PSK

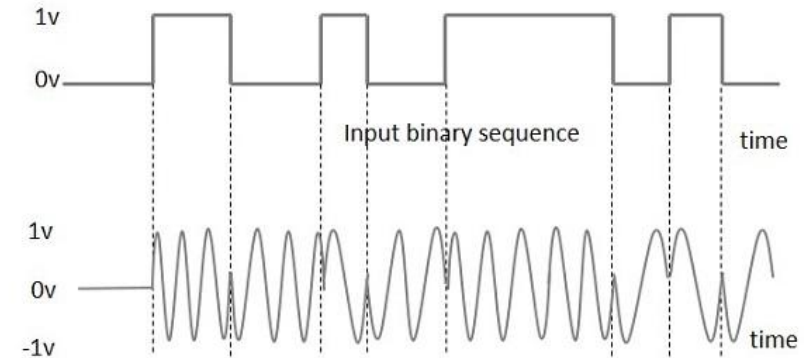
Phase shift keying

Egy szimbólum: adott fázisú jel

A fázis relatív => ref szimbólum/diff kódolás

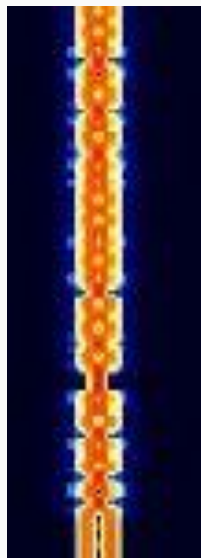
Szimbólumok számától függően

BPSK, QPSK, 8PSK

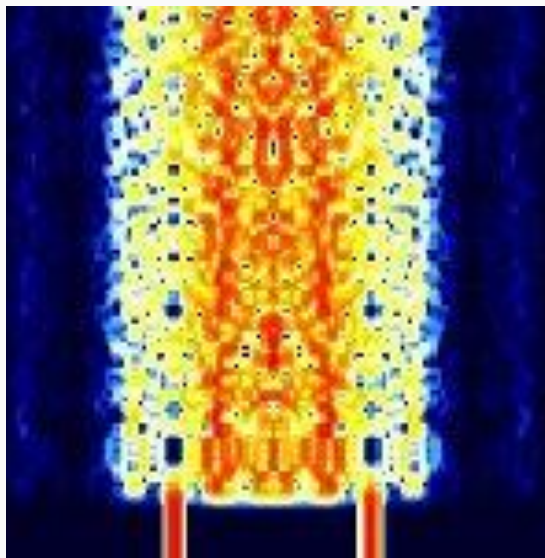


BPSK Modulated output wave

# Modulációk - PSK



BPSK31



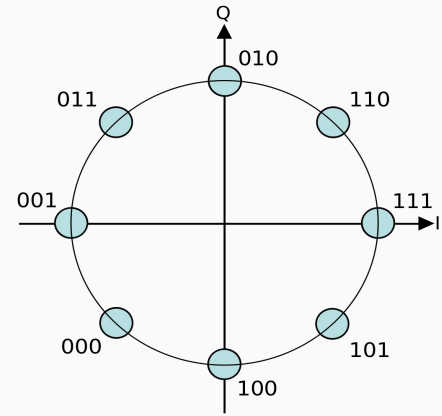
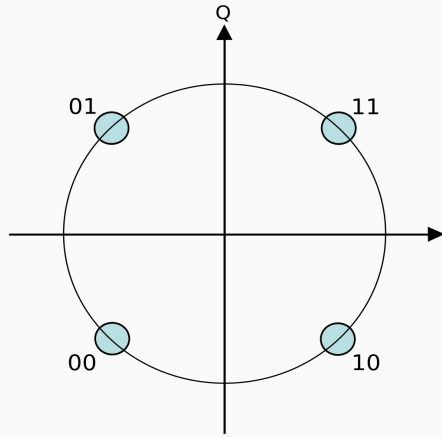
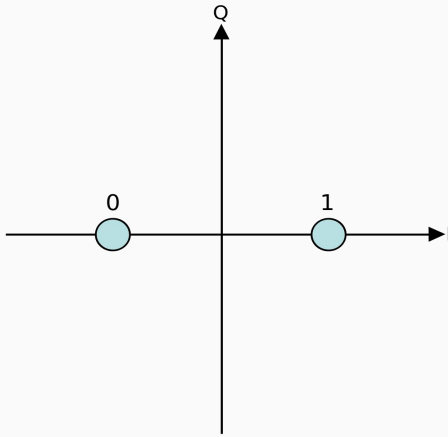
BPSK250



QPSK31

# Modulációk - Konstellaációs diagramok

PSKnál a fázor tartalmaz minden infót.  
Ábrázoljuk a szimbólumokhoz tartozó fázorokat.

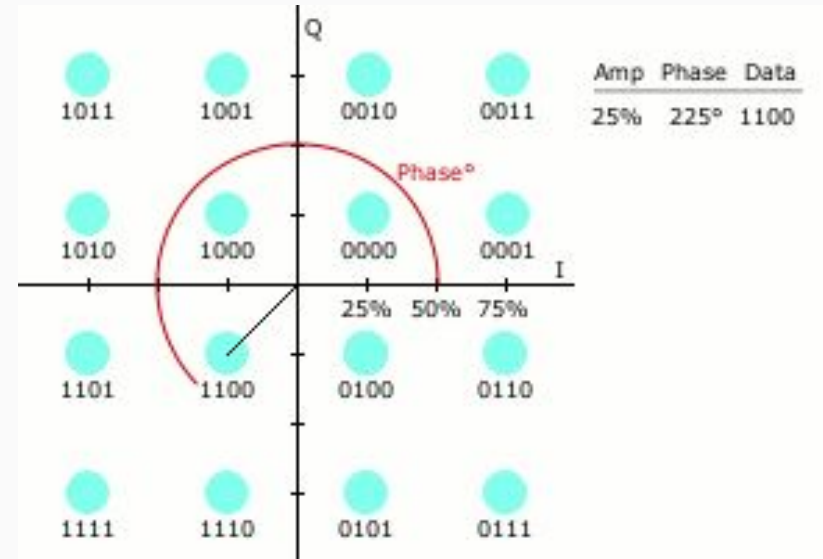


I és Q jel összegéből minden összerakható

# Modulációk - QAM

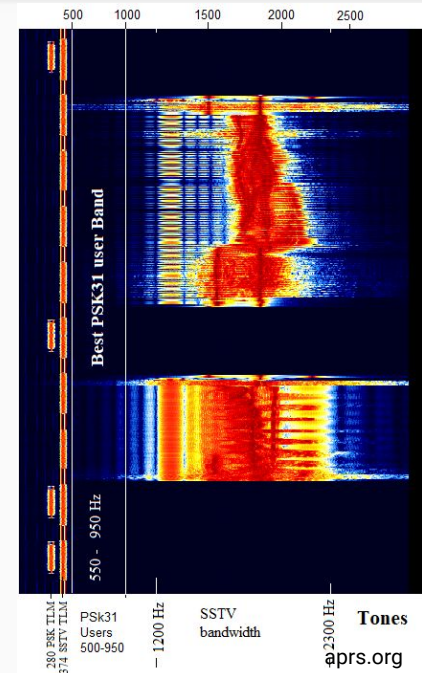
Van még hely a konstelláció ábrán  
Külön külön amplitudó moduláljuk I-t és Q-t  
Quadrature Amplitude Modulation

16, 64, 256 QAM  
DOCSIS, WiFi, DVB-T/S stb.



# Analóg képátvitel - SSTV

Analóg képátvitel alacsony sáv szélességen, 1-2 perc alatt  
50-es évektől, űrszondákon  
Jellemzően HF sávokon (DX), vagy VHF/UHF sávokon

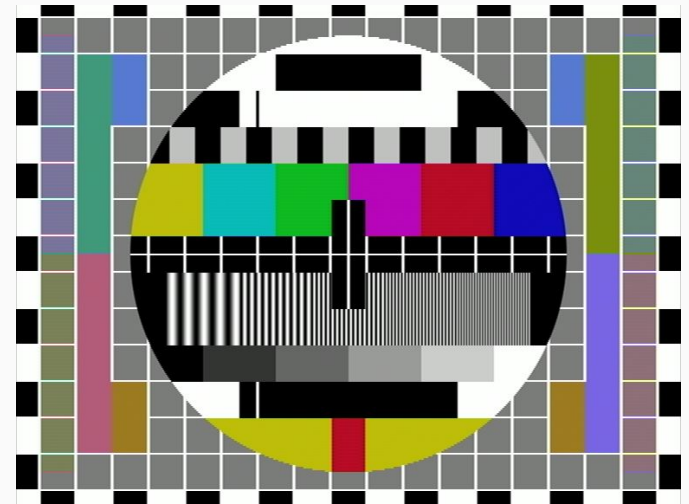
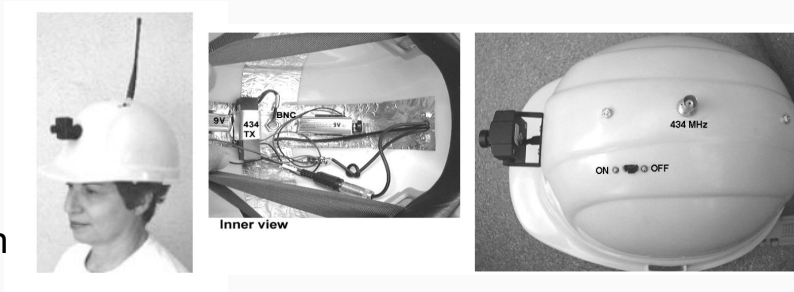




# Analóg képátvitel - ATV

Amatőr TV (HAM TV), fast scan  
Sokféle moduláció, szabvány  
Analóg (PAL, NTSC, stb.), digitális (DVB)  
Nagy sáv szélességű  
Magasabb frekvenciasávokon

ATV Hat Cam



# Összefoglalás - Kérdések?

- Mit csinál egy rádióamatőr?
- Matek
  - Fazorok
  - Fourier tétel, frekvencia tartomány
  - Szűrők alapelve
  - Modulációs tétel
- Jelfeldolgozás, modulációk
  - CW
  - Fónia: AM, SSB, FM
  - Digitális: FSK, PSK, QAM
  - Képtvitel: SSTV, ATV